





THEORIE

DER

DOPPELTPERIODISCHEN FUNCTIONEN

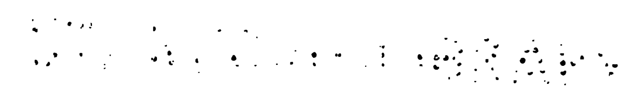
EINER

VERÄNDERLICHEN GRÖSSE.

VON

DR. **MARTIN KRAUSE,**
PROFESSOR AN DER KÖNIGL. SÄCHS. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DRESDEN.

ZWEITER BAND.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

Vorwort.

Der zweite Band meines Werkes über doppeltperiodische Functionen, welcher hiermit der Oeffentlichkeit übergeben wird, zerfällt in drei Theile, von denen der erste die Anfänge der Transformationstheorie auf der Grundlage von Additionstheoremen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln, der zweite die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen, insbesondere zweiter und dritter Art, in trigonometrische Reihen, der dritte endlich die mannigfaltigen Differentialgleichungen behandelt, denen die Functionen zweiter Art Genüge leisten. Diese Theorien sind wohl bisher in keinem Werk vereinigt worden. Ursprünglich war es meine Absicht, dieselben allein mit denjenigen zu veröffentlichen, die sich im vierten Abschnitt und einigen Paragraphen der vorangehenden Abschnitte des ersten Bandes befinden. Durch die Natur des behandelten Gegenstandes sah ich mich aber veranlasst, von meinem ursprünglichen Plane abzugehen und die schon vielfach behandelten elliptischen Functionen mit in den Kreis der Betrachtungen hineinzuziehen. Der Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen elliptischen Functionen und den Functionen zweiter und dritter Art ist nämlich ein so enger, dass die gesonderte Betrachtung der letzteren eines natürlichen Rahmens, sowie eines einheitlichen Gesichtspunktes entbehren würde und zu mannigfachen Uebelständen geführt hätte. Wie ich aber schon in der Vorrede zum ersten Bande bemerkt habe und nochmals ausdrücklich hervorheben möchte, ist es keineswegs meine Absicht gewesen, eine alles umfassende Theorie der elliptischen Functionen zu geben. Es sind im Wesentlichen nur diejenigen allgemeinen und bekannten Untersuchungen hineingezogen worden, welche die Grundlage und die Gesichtspunkte für das ganze Werk abgeben und zum Verständniss der Theorie der Functionen zweiter und dritter Art nothwendig sind — diese letzteren bilden den eigentlichen Schwerpunkt meines Werkes.

Ich habe nun, nachdem im ersten Bande auf functionentheoretische Grundlage hin die Thetafunctionen sich als Elementarfunctionen ergeben hatten, die weiteren Betrachtungen im Wesentlichen auf dem Hermite'schen Transformationsprincip aufgebaut. Zu dieser Darstellung bin ich nach genauer Vergleichung der verschiedenen in der Theorie der periodischen Functionen üblichen Methoden als der einfachsten und durchsichtigsten gelangt. Zwar ist es nicht zu verkennen, dass mit ihr gewisse Uebelstände verbunden sind. Die Darstellung hat mehrfach

etwas scheinbar Zufälliges, es ist nicht immer ersichtlich, warum gerade der oder jener Ansatz gemacht wird, daneben entspricht sie nicht der historischen Entwickelung. In der That ist in der Mehrzahl der Fälle das Princip erst angewandt worden, nachdem die betreffenden Formeln auf anderem Wege schon gefunden waren. Diese Uebelstände aber — wenn die letztere Thatsache überhaupt als ein solcher bezeichnet werden darf — werden auf der andern Seite durch gewisse Vortheile bedeutend überwogen, die der von mir eingeschlagene Weg darbietet.

In dem Hermite'schen Transformationsprincip concentrirt sich thatsächlich der überwiegende Theil der Theorie der doppeltperiodischen Functionen, und findet in ihm seinen klarsten, einfachsten und allgemeinsten Ausdruck. Durch eine Modification der Fragestellung ergeben sich aus ihm der Reihe nach die einzelnen Sätze der Theorie in systematischer und folgerichtiger Weise.

In dieser meiner Auffassungsweise liegt es u. A. begründet, dass ich von der Einführung der Weierstrass'schen Functionen abgesehen habe. Die σ-Functionen folgen nicht gleich den ϑ-Functionen dem Transformationsprincip — ihre ausführliche gesonderte Betrachtung würde mich auch nach anderer Richtung hin von dem vorgesetzten Ziele abgelenkt haben. Es möge bei dieser Gelegenheit auf eine Bemerkung von Herrn Scheibner (Sitzungsbericht der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1888 S. 276) über das Verhältniss der σ-Functionen zu den ϑ-Functionen hingewiesen werden, die den richtigen Gesichtspunkt für die Vergleichung derselben geben dürfte:

„Es ist ja an sich leicht erklärlich, dass das Studium der Sigmafunctionen, deren Einführung in die Analysis durch Weierstrass in so vielen Beziehungen sich als wichtig und fruchtbar erwiesen, seit dasselbe den Mathematikern in grösseren Kreisen zugänglich geworden und ihr Interesse in Anspruch genommen hat, eine Zeit lang auf Kosten der länger bekannten Jacobi-Abel'schen Thetafunctionen in den Vordergrund getreten ist. Im umgekehrten Falle würde es sich vermuthlich gerade umgekehrt verhalten haben, während wir doch froh sein dürfen, dass für die Erfordernisse der Theorie wie der Praxis dem Mathematiker nach doppelter Richtung so interessante Functionen zu Gebote stehen."

Um zur Hauptsache zurückzukommen: Der eigenthümliche und im Ganzen einheitliche Gang meines Werkes bringt es mit sich, dass in demselben nur die ϑ-Functionen, nicht aber die σ-Functionen berücksichtigt sind. Ebenso erklärt sich aus dem einheitlichen Gange meiner Darstellung das Fehlen mancherlei weitergehender functionentheoretischer Sätze. An Stelle jener Sätze tritt eben das genannte Transformationsprincip als das eigentlich Primäre, und jene Sätze kommen im Wesent-

lichen nur so weit und nur in solcher Ausdehnung in Betracht, als sie sich aus diesem Princip als Folgerungen ergeben. Allerdings können dabei Rechnungen nicht vermieden werden. Wenn man heutzutage hin und wieder die Rechnung als „unmodern" bezeichnet und womöglich allen Arbeiten einen und denselben „modernen" Zuschnitt aufdrängen möchte, so scheint mir das doch einigermassen unbillig.

Dass man im Allgemeinen, wo es angeht, beschwerliche Rechnungen gerne vermeiden wird, versteht sich wohl von selber und bedarf also kaum noch der Erwähnung. Oder hätten vielleicht die Mathematiker früherer Jahrhunderte oder Jahrtausende hierüber anders gedacht?

Aber häufig, namentlich beim Hineingehen in neue noch unerforschte Gebiete oder auch bei der Eröffnung neuer Wege in schon bekannten Gebieten werden Fälle eintreten, in denen man die Rechnung nicht entbehren kann. Auch ist zu beachten, dass nicht zu weit getriebene Rechnungen manches anziehende Moment und eine gewisse pädagogische Kraft besitzen, die durch blosses Angeben von Ideen nicht erreicht wird, und dass überhaupt die Rechnung stets mit einer gewissen Nothwendigkeit in Function treten wird, sobald es sich darum handelt, die Grösse und Mannigfaltigkeit eines Gedankens oder eines Princips nach allen Seiten hin klar zu legen.

Endlich erklärt sich aus dem einheitlichen Gange meines Werkes z. B. auch das Fehlen geometrischer Betrachtungen. Wenn ich auch, als Docent einer technischen Hochschule, ausserordentlich geneigt bin, den geometrischen Betrachtungen die allergrösste Bedeutung beizulegen und meine hiesigen Vorlesungen über höhere Analysis auf durchaus geometrischer Grundlage aufbaue, so folgt hieraus doch noch keineswegs die Nothwendigkeit, in allen Theilen der so weit verzweigten Mathematik und unter allen Umständen stets das Geometrische zu bevorzugen. Vielmehr wird nach meiner Ansicht die Analysis auch in ihrer reinen Form neben der Geometrie stets ihre volle Berechtigung behalten. Die Vermischung geometrischer und analytischer Methoden, wie sie z. B. in den Arbeiten des Herrn F. Klein anzutreffen ist, wird vielfach zweckmässig sein. Sie als allgemeine und obligatorische Norm hinstellen zu wollen — daran wird doch wohl Niemand denken.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen sei es mir gestattet, auf den ersten Abschnitt des zweiten hier vorliegenden Bandes etwas näher einzugehen. Der Zweck desselben ist es, die Anfänge einer Transformationstheorie auf der Grundlage von Additionstheoremen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln in elementarer Weise zu entwickeln. Ich lege hierbei das Hauptgewicht auf das Princip selber, nicht aber auf seine hier vorliegende Durchführung, die noch sehr der Ergänzung

und Erweiterung bedarf. Der Ausgangspunkt für meine Anschauungsweise ist in meinen Arbeiten über die hyperelliptischen Functionen gelegen. Ich versuchte dort die Methoden, wie sie für die elliptischen Functionen massgebend waren, auf die hyperelliptischen erster Ordnung zu übertragen, um eine Transformationstheorie derselben zu erhalten. Es gelang mir, die verschiedenen Arten von Transformationsgleichungen zu definiren und ihre Haupteigenschaften zu entwickeln — meine Versuche dagegen nach jenen früheren Methoden Transformationsgleichungen wirklich zu bilden, stiessen auf die grössten Schwierigkeiten und führten mich zu keinem bemerkenswerthen Resultate. So sah ich mich denn veranlasst, für die elliptischen Functionen nach neuen Methoden zu suchen, nach solchen, die sich leicht übertragen liessen. Ein Theil der hierbei gefundenen Resultate findet sich im ersten Bande dieses Werkes angegeben, insbesondere in den §§ 59, 60, 61, 75 etc. Die Uebertragung derselben auf die hyperelliptischen Functionen ermöglichte die Darstellung von Transformationsgleichungen in besonders einfachen Fällen. Ich musste mich aber bald davon überzeugen, dass auch diese Methoden keine weitreichenden und befriedigenden seien — so interessant die einzelnen gewonnenen Resultate auch an sich waren —, und kam auf diesem Wege im Anschluss an die bekannten Schröter'schen Arbeiten zu der Aufstellung meiner Additionstheoreme und zu der Anschauungsweise, die in dem vorliegenden zweiten Bande dargelegt wird. Bei derselben ist das eigentliche Ziel: die wirkliche Aufstellung von Transformationsgleichungen und damit diejenige Aufgabe, welche als das eigentliche Transformationsproblem zu bezeichnen ist und seit längerer Zeit die Kräfte einer Reihe von Mathematikern in Anspruch genommen hat.

Als charakteristisch sind bei dem von mir eingeschlagenen Wege folgende Punkte hervorzuheben.

Erstens können die Transformationsgleichungen, die sich für die elliptischen Functionen ergeben, ohne Schwierigkeit auf die hyperelliptischen übertragen werden. Man kommt dabei zu einer Fülle von Transformationsgleichungen, die auf anderem Wege nur schwer dürften herzustellen sein.

Zweitens wird die allgemeine Transformationstheorie in enge Verbindung gebracht mit der speciellen Transformationstheorie, nämlich mit der Entwickelung der Constantenrelationen. Ich habe es stets als unnatürlich empfunden, dass die Modular- und Multiplicatorbeziehungen in fremdartiger Weise, unter Heranziehung völlig neuer Principien, und auf ganz anderem Wege als die gewöhnlichen Thetarelationen abgeleitet werden, obgleich sie doch im Grunde genommen nichts anderes als

Thetarelationen sind, nur bezogen auf specielle Werthe der Argumente. Es erschien mir daher höchst wünschenswerth, diese Constantenrelationen durch Specialisirung der Argumente aus allgemeinen Thetarelationen abzuleiten, sie also dem Hermite'schen Princip unterzuordnen und zu zeigen, dass auch für die specielle Theorie das Letztere von grösstem Nutzen ist.

Mit den soeben entwickelten Anschauungen befinde ich mich im Widerspruch mit den Anschauungen, wie sie in einer neuerdings erschienenen Besprechung des ersten Bandes dieses Werkes von Herrn Fricke enthalten sind. Legt dieselbe einerseits von einer in der Mathematik ungewöhnlichen Werthschätzung der eigenen Anschauungen des Herrn Fricke Zeugniss ab, so ist es andrerseits doch zweifellos, dass die in derselben vertretenen Ansichten von einer grösseren Anzahl von Mathematikern getheilt werden, als deren Wortführer Herr Fricke anzusehen ist. Unter solchen Umständen habe ich geglaubt, mich hier in der Einleitung über meine Anschauungen etwas ausführlicher aussprechen zu müssen, als es sonst wohl geschehen wäre.

Der zweite Abschnitt enthält die Entwickelung der periodischen Functionen in trigonometrische Reihen, wobei das Hauptgewicht auf die Functionen 2ter und 3ter Art gelegt ist. Derselbe knüpft an einige neuere Arbeiten an, vor allem von Appell. Als charakteristisch für die gewählte Darstellungsweise ist die gemeinsame Behandlung der Functionen 2ter und 3ter Art, sowie die Verknüpfung mit der Transformationstheorie zu bezeichnen. In der Theorie der Functionen 2ter Art ist es seit den Arbeiten von Hermite üblich, die allgemeinen Functionen auf gewisse Grundfunctionen — etwa die Function $\vartheta_1(v+a):\vartheta_1(v)$ — zurückzuführen; in ähnlicher Weise werden von mir auch bei den Functionen 3ter Art gewisse Primfunctionen eingeführt und dazu gebraucht, um zu den trigonometrischen Entwickelungen der allgemeinen Functionen zu gelangen. Diese Primfunctionen sind der Transformationstheorie entnommen. Um die praktische Bedeutung der angegebenen Methoden klar zu legen, ist eine Anzahl der wichtigsten und einfachsten Beispiele gegeben worden.

Der dritte Abschnitt behandelt die Theorie der Picard'schen Differentialgleichungen. Um den elementaren Charakter dieses Werkes zu wahren und die Stellung zu fixiren, welche die Picard'schen Differentialgleichungen unter den linearen homogenen Differentialgleichungen einnehmen, habe ich eine kurze Darstellung der ersten und einfachsten Sätze über die letzteren nach den Arbeiten von Fuchs, Frobenius u. a. vorausgeschickt. Der Schwerpunkt der Untersuchungen ist auf die wirkliche Integration der Picard'schen Differentialgleichungen gelegt worden. Es ist das geschehen, weil hierin die hauptsächlichste Be-

deutung und der Hauptwerth der Anwendungen der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art auf die Theorie der Differentialgleichungen zu suchen ist. Bei der Integration ist der „allgemeine" Fall von den „speciellen" unterschieden, wie in § 36 näher auseinandergesetzt worden ist.

Die angewandten Methoden sind einheitliche und zwar beruhen sie auf der Productzerlegung der doppeltperiodischen Functionen, während die Summendarstellung mehr zurücktritt und lediglich als Folge der ersteren angesehen wird. Es dürfte diese Darstellung den Vorzug grösserer Symmetrie und Durchsichtigkeit besitzen.

Die speciellen Fälle sind wesentlich kürzer gefasst als der allgemeine. Es ist das geschehen, weil man bei ihnen zum Theil aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen heraustritt und in die Theorie anderer Functionen gelangt, die ihre eigenen selbstständigen Methoden besitzen. Es ist z. B. einfacher und naturgemässer, die specielle Lamé'sche Gleichung im Rahmen der Theorie der Kugelfunctionen zu betrachten als unter Hinzunahme der doppeltperiodischen Functionen, und ähnlich verhält es sich in anderen Fällen, vor allem bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Andrerseits freilich ist nicht ausgeschlossen, dass man auf dem in diesem Werke eingeschlagenen Wege in einfacher Weise zu der Integration linearer homogener Differentialgleichungen gelangt, deren Coefficienten rationale oder algebraische Functionen sind und auf welche die Aufmerksamkeit von anderer Seite her noch nicht gelenkt worden ist. Auf eine weitere Durchführung dieses Gedankens musste hier leider verzichtet werden.

Auch diesem Bande ist eine grössere Anzahl von Literaturangaben beigefügt worden. Wenn ich auch bemüht gewesen bin, die wichtigeren in Betracht kommenden Arbeiten alle anzuführen, so möchte ich doch besonders betonen, dass das Verzeichniss auf Vollständigkeit keinen Anspruch erheben soll. Den überwiegenden Theil der citirten Arbeiten habe ich eingesehen, wo es, wie bei einigen Arbeiten ausländischer Autoren, mir nicht möglich war, habe ich die betreffenden Citate den Jahrbüchern über die Fortschritte der Mathematik entnommen, welche sich hier wiederum von grösstem Nutzen gezeigt haben.

Den H. H. Privatdocenten Dr. Naetsch und Candidaten des höheren Schulamtes Röseberg spreche ich für ihre liebenswürdige Beihülfe beim Lesen eines Theiles des Manuscriptes und der Correcturbogen meinen verbindlichsten Dank aus.

Der Firma B. G. Teubner fühle ich mich durch freundliches Entgegenkommen bei dem Drucke des Werkes zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Martin Krause.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Die Transformationstheorie der elliptischen Functionen auf Grund von Additionstheoremen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln.

Zweiter Abschnitt.

Die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen in trigonometrische Reihen.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Picard'schen Differentialgleichungen.

Erster Abschnitt.

Die Transformationstheorie der elliptischen Functionen auf Grund von Additionstheoremen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln.

---

§ 1.[1])

Stellung des speciellen Transformationsproblemes. Recapitulation der im ersten Bande aufgestellten Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln.

In den folgenden Paragraphen des ersten Abschnitts soll versucht werden, die von dem Verfasser in § 80 des ersten Bandes dieses Werkes aufgestellten Additionstheoreme für die Transformationstheorie zu verwerthen.

Nach den Darlegungen des ersten Bandes zerfällt das Transformationsproblem in zwei gesonderte Theile. Der erste — der allgemeine Theil hatte die Aufgabe, die transformirten Theta- und elliptischen Functionen durch die ursprünglichen darzustellen, der zweite — der specielle Theil hatte die Aufgabe, die Beziehungen zu untersuchen, die zwischen den mannigfachen in den Transformationsformeln auftretenden Constanten bestehen. Der erste Theil kann als erledigt angesehen werden — der zweite dagegen nicht. Derselbe gipfelte zunächst in der Definition der allgemeinen Transformationsgleichungen und den Methoden zur Aufstellung und Discussion derselben. Diese Methoden sind, wie aus den bezüglichen Untersuchungen folgt, durchaus verschieden von den Methoden, die von uns im Uebrigen in der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen angewandt worden sind und die im Wesentlichen auf dem Hermite'schen Transformationsprincip beruhen. Insbesondere zeigte sich, dass die gewöhnlichen Thetarelationen, sei es für beliebige Werthe der Veränderlichen, sei es für specielle, ein unmittelbarer Ausfluss des allgemeinen Jacobischen Additionstheorems sind.

Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, dass die in § 80 des ersten Bandes aufgestellten Additionstheoreme durch geeignete Umformungen und Specialisirung zu Transformationsgleichungen führen, so zwar, dass die letzteren als specielle Fälle allgemeiner Thetarelationen angesehen werden können. Damit ist dann ein Zusammenhang in der Methode zwischen der allgemeinen und der speciellen Transformationstheorie hergestellt. Hierbei verstehen wir unter Transformationsgleichung eine beliebige Relation zwischen ursprünglichen und transformirten Grössen, deren Form sowohl rational als auch irrational sein kann, während die Zahl der vorkommenden Grössen eine beliebige ist.

Wir wollen nun im Folgenden zwei Formen von Additionstheoremen gebrauchen, die aus den beiden Lehrsätzen sich ergeben:

Lehrsatz I: Leisten die ganzen Zahlen a den Gleichungen Genüge:

$$\mu_1 a_{\varepsilon 1}^2 + \mu_2 a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n}^2 = m_\varepsilon,$$
$$\mu_1 a_{\varepsilon 1} a_{r 1} + \mu_2 a_{\varepsilon 2} a_{r 2} + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n} a_{r n} = 0,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots a_{\varepsilon n} v_n,$$
$$g_\varepsilon \equiv a_{\varepsilon 1} \mu_1 s_1 + a_{\varepsilon 2} \mu_2 s_2 + \cdots a_{\varepsilon n} \mu_n s_n \mod m_\varepsilon.$$

Lehrsatz II: Leisten die ganzen Zahlen a den Gleichungen Genüge:

$$\mu_1 a_{\varepsilon 1}^2 + \mu_2 a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n}^2 = 4 m_\varepsilon,$$
$$\mu_1 a_{\varepsilon 1} a_{r 1} + \mu_2 a_{\varepsilon 2} a_{r 2} + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n} a_{r n} = 0,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$2^n \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$2 w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots a_{\varepsilon n} v_n,$$
$$2 \eta_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} \eta'_1 + a_{\varepsilon 2} \eta'_2 + \cdots a_{\varepsilon n} \eta'_n,$$
$$g_\varepsilon \equiv a_{\varepsilon 1} \mu_1 s_1 + \cdots a_{\varepsilon n} \mu_n s_n \mod 2 m_\varepsilon.$$

Die Grössen η' können die Werthe 0 und 1 annehmen. Die Summen und Producte sind in bekannter Weise zu erstrecken.

Es könnten noch weitere Additionstheoreme aufgestellt werden, bei welchen ganz allgemein $\left[\frac{g_\varepsilon}{r}\right]$ vorkommt, indessen sehen wir von ihnen ab, da die Beziehungen zwischen den hierbei auftretenden

Grössen und den Grössen der gewöhnlichen Transformationstheorie zu wenig einfach sind.

Es soll nun versucht werden, aus diesen Theoremen Transformationsgleichungen abzuleiten, die zu einem bestimmten n gehören. Solche Gleichungen würden wir ohne Weiteres erhalten, wenn in den fertigen Formeln nur die Moduln τ und $n\tau$ vorkommen. Da ferner die Transformation vom Grade 2^r als bekannt angenommen werden kann, da dieselbe zu bekannten Algorithmen führt, so können wir auch die Moduln $2^r\tau$ und $2^r n\tau$ zulassen.

Zunächst sollen die einfachsten Transformationsgrade in Bezug auf die Anwendbarkeit unserer Theoreme untersucht werden.

§ 2.

Die Transformation dritten Grades.

Zunächst untersuchen wir die Transformation dritten Grades. Die Additionstheoreme zerfallen in solche, die zwischen Producten von je zwei, drei etc. Factoren bestehen.

Wir nehmen zuerst den Fall von zwei Factoren. Für diesen existirt jedenfalls das Theorem:

$$1)\quad \vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](2v_1+v_2,6\tau)\,\vartheta_3[g_2](v_1-v_2,3\tau),$$

wobei die Congruenzen stattfinden:

$$g_1 \equiv 2s_1 + 2s_2 \mod 6,$$
$$g_2 \equiv \ s_1 - 2s_2 \mod 3.$$

Aus denselben folgt:

$$g_1 - 2g_2 \equiv 0 \mod 6,$$

sodass wir die Formel erhalten:

$$\begin{aligned}\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau) &= \vartheta_3(2v_1+v_2,6\tau)\,\vartheta_3(v_1-v_2,3\tau)\\ &+ \vartheta_3[2](2v_1+v_2,6\tau)\,\vartheta_3[1](v_1-v_2,3\tau)\\ &+ \vartheta_3[4](2v_1+v_2,6\tau)\,\vartheta_3[2](v_1-v_2,3\tau).\end{aligned}$$

Durch Specialisirung ergeben sich hieraus eine Reihe von Beziehungen, aus denen wir die beiden folgenden herausgreifen wollen:

$$2)\quad \begin{cases}\vartheta_3(0,\tau)\,\vartheta_3(0,2\tau) = \vartheta_3(0,6\tau)\,\vartheta_3(0,3\tau) + 2\vartheta_3[2](0,6\tau)\,\vartheta_3[1](0,3\tau),\\ \vartheta_3(0,\tau)\,\vartheta_2(0,2\tau) = \vartheta_2(0,6\tau)\,\vartheta_3(0,3\tau) + 2\vartheta_2[2](0,6\tau)\,\vartheta_3[1](0,3\tau).\end{cases}$$

Dieselben können als Modulargleichungen in irrationaler Form aufgefasst werden, da die Thetafunctionen mit den Moduln 2τ und 6τ sich in bekannter Weise durch die Thetafunctionen mit den Moduln τ und 3τ und zwar mit Hülfe von Quadratwurzeln darstellen lassen.

Ein weiteres Additionstheorem zwischen Producten von je zwei Factoren lautet:

$$3)\quad 2^2\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,3\tau)=\sum\vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1+\eta_1,3\tau)\cdot\vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2+\eta_2,\tau),$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$\begin{aligned}2w_1&=3v_1+v_2, & 2\eta_1&=3\eta'_1+\eta'_2,\\ 2w_2&=v_1\;-v_2, & 2\eta_2&=\eta'_1\;-\eta'_2\end{aligned}$$

und zwischen g_1 und g_2 die Congruenz besteht:

$$\frac{g_1}{3}+g_2\equiv 0 \mod 2.$$

Führen wir das Theorem aus, so erhalten wir die bekannte Relation:

$$\begin{aligned}2\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,3\tau)&=\vartheta_3(w_1,3\tau)\,\vartheta_3(w_2,\tau)+\vartheta_2(w_1,3\tau)\,\vartheta_2(w_2,\tau)\\ &+\vartheta_0(w_1,3\tau)\,\vartheta_0(w_2,\tau)-\vartheta_1(w_1,3\tau)\,\vartheta_1(w_2,\tau).\end{aligned}$$

Setzt man $v_1=v_2=0$, so ergiebt sich die Modularbeziehung:

$$4)\qquad \vartheta_3 x_0=\vartheta_0 y_0+\vartheta_2 z_0,$$

setzt man $v_1=0$, $v_2=\tau$, so erhält man:

$$5)\qquad \vartheta_3 x_1=-\vartheta_0 y_1+\vartheta_2 z_1,$$

wobei von der Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht worden ist:

$$6)\qquad \begin{cases}x_g=\vartheta_3[g](0,3\tau), & y_g=\vartheta_0[g](0,3\tau),\\ z_g=\vartheta_2[g](0,3\tau), & v_g=\vartheta_1[g](0,3\tau).\end{cases}$$

Wir kommen jetzt zu Additionstheoremen zwischen Producten von je drei Factoren.

Wir nehmen zuerst das Folgende:

$$7)\quad 2^3.\,\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau)\,\vartheta_3(v_3,6\tau)=\sum\prod\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon,3\tau),\quad \varepsilon=1,2,3,$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned}2w_1&=2v_1+v_2+v_3, & 2\eta_1&=2\eta'_1+\eta'_2+\eta'_3,\\ 2w_2&=2v_1+v_2-v_3, & 2\eta_2&=2\eta'_1+\eta'_2-\eta'_3,\\ 2w_3&=2v_1-2v_2, & 2\eta_3&=2\eta'_1-2\eta'_2,\end{aligned}$$

während die Grössen g_1, g_2, g_3 die Werthe annehmen können:

$$\begin{aligned}g_1&=g_2=g_3=0,\\ g_1&=g_2=g_3=2,\\ g_1&=g_2=g_3=4.\end{aligned}$$

Durch Specialisirung ergeben sich hieraus wiederum Transformationsgleichungen. Wir greifen zwei derselben heraus. Setzen wir:

$$v_1=v_2=v_3=0,$$

so erhalten wir:

$$2\vartheta_3 . \vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_3(0, 6\tau) = (x_0^2 + y_0^2)x_0 + 2(x_1^2 + y_1^2)x_1,$$

setzen wir:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \tau, \quad v_3 = 3\tau,$$

so ergiebt sich:

$$2\vartheta_3 . \vartheta_2(0, 2\tau)\vartheta_2(0, 6\tau) = (x_0^2 - y_0^2)x_0 + 2(x_1^2 - y_1^2)x_1.$$

Durch Addition erhalten wir die elegante Relatian:

$$8) \quad \vartheta_3[\vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_3(0, 6\tau) + \vartheta_2(0, 2\tau)\vartheta_2(0, 6\tau)] = x_0^3 + 2x_1^3.$$

Ein zweites Additionstheorem ist das folgende:

$$9) \quad 2^3\vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, 6\tau) = \sum P_\varepsilon,$$

$$P_\varepsilon = \prod \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau)$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 6,$$

wobei die Relationen:

$$\begin{array}{ll} 2w_1 = v_1 + v_2 + v_3, & 2\eta_1 = \eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3, \\ 2w_2 = 2v_1 - 2v_2, & 2\eta_2 = 2\eta'_1 - 2\eta'_2, \\ 2w_3 = 3v_1 + 3v_2 - v_3, & 2\eta_3 = 3\eta'_1 + 3\eta'_2 - \eta'_3, \end{array}$$

und die Congruenzen bestehen:

$$\begin{array}{ll} g_1 \equiv s_1 + s_2 + 6s_3 & mod\, 4, \\ g_2 \equiv 2s_1 - 2s_2 & mod\, 4, \\ g_3 \equiv 3s_1 + 3s_2 - 6s_3 & mod\, 12. \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$g_1 \equiv \frac{g_3}{3}\, mod\, 4, \quad g_2 \equiv \frac{2g_3}{3}\, mod\, 4, \quad g_3 \equiv 0\, mod\, 3,$$

sodass die Summe in Bezug auf die Grössen g vier Glieder enthält.

Wir setzen an Stelle von:

$$\begin{array}{ll} v_1 & , v_2 \\ v_1 + \frac{1}{2}, & v_2 + \frac{3}{2}, \end{array}$$

so gehen die Grössen

$$\begin{array}{lll} w_1 & , w_2 & , w_3 \end{array}$$

über in:

$$w_1 + 1, \quad w_2 - 1, \quad w_3 + 3$$

und wir erhalten:

$$2^3 . \vartheta_0(v_1, \tau)\vartheta_0(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, 6\tau) = \sum (-1)^{\frac{g_3}{3}} P_\varepsilon.$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$2^2 . f_1 = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau)$$

$$\mathfrak{g}_1 \equiv \frac{\mathfrak{g}_3}{3}\, mod\, 2, \quad \mathfrak{g}_2 \equiv 0\, mod\, 2, \quad \mathfrak{g}_3 \equiv 0\, mod\, 3,$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1 = \vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, 6\tau) + \vartheta_0(v_1, \tau)\vartheta_0(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, 6\tau).$$

Durch Specialisirung ergeben sich hieraus wiederum Transformationsgleichungen — indessen wollen wir noch einen Schritt weiter gehen.

Dazu setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3$$

$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_2 + \frac{\tau}{2}, \quad v_3 + 3\tau,$$

so geht w_1 über in $w_1 + 2\tau$ und wir erhalten:

$$2^2 . f_2 = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3} \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_2 = \vartheta_2(v_1, \tau)\,\vartheta_2(v_2, \tau)\,\vartheta_2(v_3, 6\tau) - \vartheta_1(v_1, \tau)\,\vartheta_1(v_2, \tau)\,\vartheta_2(v_3, 6\tau).$$

Durch Addition erhalten wir:

$$f_1 + f_2 = 2[\vartheta_3(w_1, 2\tau)\,\vartheta_3(w_2, 2\tau)\,\vartheta_3(w_3, 6\tau) + \vartheta_2(w_1, 2\tau)\,\vartheta_3(w_2, 2\tau)\,\vartheta_2(w_3, 6\tau)],$$

eine Relation, die durch Specialisirung wiederum Transformationsgleichungen ergiebt.

Drittens nehmen wir das Additionstheorem:

$$10) \qquad 2^3 \vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_3(v_3, 3\tau) = \sum P_\varepsilon,$$

wobei P_ε die frühere Bedeutung hat und die Grössen m die Werthe haben:

$$m_1 = 3, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 6.$$

Die Beziehungen zwischen den Argumenten lauten:

$$\begin{aligned} 2w_1 &= v_1 + 2v_2 + v_3, & 2\eta_1 &= \eta'_1 + 2\eta'_2 + \eta'_3, \\ 2w_2 &= 3v_1 \qquad - v_3, & 2\eta_2 &= 3\eta'_1 \qquad - \eta'_3, \\ 2w_3 &= 2v_1 - 2v_2 + 2v_3, & 2\eta_3 &= 2\eta'_1 - 2\eta'_2 + 2\eta'_3, \end{aligned}$$

die Grössen g endlich leisten den Congruenzen Genüge:

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv s_1 + 4s_2 + 3s_3 \; mod\, 6, \\ g_2 &\equiv 3s_1 \qquad - 3s_3 \; mod\, 6, \\ g_3 &\equiv 2s_1 - 4s_2 + 6s_3 \; mod\, 12. \end{aligned}$$

Aus den letzteren folgt:

$$\begin{aligned} g_2 &\equiv 3g_1 \; mod\, 6, \\ g_3 &\equiv 2g_1 \; mod\, 12, \end{aligned}$$

sodass die Summe in Bezug auf die Grössen g im Ganzen sechs Glieder ergiebt. Um zu möglichst einfachen und übersichtlichen Relationen zu gelangen, setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_3$$

resp.:

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_3 + \frac{3}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$, w_3 in $w_3 + 2$ über und wir erhalten:

$$2^3 . \vartheta_0(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, 2\tau)\, \vartheta_0(v_3, 3\tau) = \sum (-1)^{\frac{\pi i g_1}{3}} P_\varepsilon$$

oder also:

$$2^2 . f_1 = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei nunmehr gesetzt ist:

$$f_1 = \vartheta_3(v_2, 2\tau)\, [\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_3, 3\tau) + \vartheta_0(v_1, \tau)\, \vartheta_0(v_3, 3\tau)].$$

Durch Specialisirung ergeben sich Transformationsgleichungen — indessen wollen wir auch hier einen Schritt weiter gehen. Dazu setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_3$$

resp.:

$$v_1 + \frac{3\tau}{2}, \quad v_3 + \frac{3.3\tau}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 3\tau$, w_3 in $w_3 + 6\tau$ über und wir erhalten:

$$4 f_2 = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_3} \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta \;, m_\varepsilon \tau)$$

$$f_2 = \vartheta_3(v_2, 2\tau)\, [\vartheta_2(v_1, \tau)\, \vartheta_2(v_3, 3\tau) - \vartheta_1(v_1, \tau)\, \vartheta_1(v_3, 3\tau)].$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$f_1 + f_2 = 2\vartheta_3(w_2, 3\tau)\, [\vartheta_3(w_1, 3\tau)\, \vartheta_3(w_3, 6\tau) + \vartheta_3[1](w_1, 3\tau)\, \vartheta_3[2](w_3, 6\tau) + \vartheta_3[2](w_1, 3\tau)\, \vartheta_3[4](w_3, 6\tau)].$$

Setzen wir hierin die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Transformationsgleichung:

$$11) \quad \vartheta_3(0, 2\tau)[\vartheta_3(0, \tau)\vartheta_3(0, 3\tau) + \vartheta_0(0, \tau)\vartheta_0(0, 3\tau) + \vartheta_2(0, \tau)\vartheta_2(0, 3\tau)] = R,$$

$$R = 2\vartheta_3(0, 3\tau)[\vartheta_3(0, 3\tau)\vartheta_3(0, 6\tau) + 2\vartheta_3[1](0, 3\tau)\,\vartheta_3[2](0, 6\tau)],$$

eine Gleichung, die ohne Schwierigkeit auch aus den früheren hätte hergeleitet werden können.

Ein viertes und letztes Additionstheorem zwischen Producten von je drei Factoren lautet:

$$12) \qquad \vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, \tau)\, \vartheta_3(v_3, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau)$$

$$m_1 = 3, \quad m_2 = 6, \quad m_3 = 2,$$

während die Beziehungen stattfinden:

$$\begin{aligned} w_1 &= \quad\;\; v_1 + v_2 + v_3, & g_1 &\equiv \quad\;\; s_1 + s_2 + s_3 \; mod\, 3, \\ w_2 &= -2v_1 + v_2 + v_3, & g_2 &\equiv -2s_1 + s_2 + s_3 \; mod\, 6, \\ w_3 &= \qquad\quad v_2 - v_3, & g_3 &\equiv \qquad\quad s_2 - s_3 \; mod\, 2. \end{aligned}$$

Aus den Congruenzen folgt:

$$2g_1 + g_2 + 3g_3 \equiv 0 \; mod\, 6,$$

$$g_1 - g_2 \equiv 0 \; mod\, 3.$$

Es bleiben auf der rechten Seite demnach im Ganzen sechs Glieder. Wir setzen jetzt an Stelle von:

resp.:

$$v_2 \quad , \quad v_3$$
$$v_2 + \frac{1}{2}, \quad v_3 + \frac{1}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$, w_2 in $w_2 + 1$ über und wir erhalten:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)[\vartheta_3(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, \tau) + \vartheta_0(v_2, \tau)\vartheta_0(v_3, \tau)] = R,$$

$$R = 2\vartheta_3(w_3, 2\tau)[\vartheta_3(w_1, 3\tau)\vartheta_3(w_2, 6\tau) + \vartheta_3[1](w_1, 3\tau)\vartheta_3[4](w_2, 6\tau) + \vartheta_3[2](w_1, 3\tau)\vartheta_3[2](w_2, 6\tau)].$$

Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Transformationsgleichung 13):

$$\vartheta_3(\vartheta_3^2 + \vartheta_0^2) = 2\vartheta_3(0, 2\tau)[\vartheta_3(0, 3\tau)\vartheta_3(0, 6\tau) + \vartheta_3[1](0, 3\tau)\vartheta_3[2](0, 6\tau)],$$

die auch in einfacher Weise aus den früheren abgeleitet werden kann.

Wir kommen jetzt zu Additionstheoremen zwischen Producten von vier Factoren. Um eine Erleichterung in der Schreibweise zu erzielen, wollen wir die Transformationszahlen und die Zahlen μ und m in einem Schema vorausschreiben. Wir nehmen als erstes Additionstheorem das folgende:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = 1,$	$\mu_3 = 1,$	$\mu_4 = 1$	
3	1	1	1	$m_1 = 3$
1	-3	1	-1	$m_2 = 3$
1	-1	-3	1	$m_3 = 3$
1	1	-1	-3	$m_4 = 3$

$$14)\quad \begin{cases} 2^4 . \vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, \tau)\vartheta_3(v_4, \tau) = \sum P_\varepsilon \\ P_\varepsilon = \sum \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=4} \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau), \end{cases}$$

wobei die Congruenzen bestehen:

$$g_1 \equiv 3s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \; mod\, 6,$$
$$g_2 \equiv s_1 - 3s_2 + s_3 - s_4 \; mod\, 6,$$
$$g_3 \equiv s_1 - s_2 - 3s_3 + s_4 \; mod\, 6,$$
$$g_4 \equiv s_1 + s_2 - s_3 - 3s_4 \; mod\, 6.$$

Aus diesen Congruenzen folgt:

$$g_3 \equiv \quad 2g_1 + g_2 \; mod\, 6,$$
$$g_4 \equiv -2g_1 + g_2 \; mod\, 6,$$
$$g_1 + \; g_2 \equiv 0 \; mod\, 2.$$

Es sind die Grössen g also zu gleicher Zeit gerade oder ungerade.

Wir setzen nun an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3 \quad , \quad v_4$$

resp.:

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_2 + \frac{1}{2}, \quad v_3 + \frac{1}{2}, \quad v_4 - \frac{1}{2},$$

so tritt an Stelle von:

$$w_1 \quad , \quad w_3 \quad , \quad w_4$$

resp.:

$$w_1 + 1, \quad w_3 - 1, \quad w_4 + 1$$

und wir erhalten:

$$2^4 . \prod \vartheta_0(v_\varepsilon \tau) = \sum (-1)^{g_1} . P_\varepsilon$$

oder also:

$$2^3 . f_1 = \sum \mathfrak{P}_\varepsilon,$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1 = \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) + \prod \vartheta_0(v_\varepsilon, \tau),$$

$$\mathfrak{P}_\varepsilon = \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

und die Congruenzen bestehen:

$$\mathfrak{g}_3 \equiv \quad 2\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \; mod\, 3,$$

$$\mathfrak{g}_4 \equiv -2\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \; mod\, 3.$$

Wir setzen zweitens an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3 \quad , \quad v_4$$

resp.:

$$v_1 + \frac{3\tau}{2}, \quad v_2 + \frac{3\tau}{2}, \quad v_3 + \frac{3\tau}{2}, \quad v_4 - \frac{3\tau}{2},$$

so tritt an Stelle von:

$$w_1 \quad , \quad w_3 \quad , \quad w_4$$

resp.:

$$w_1 + 3\tau, \quad w_3 - 3\tau, \quad w_4 + 3\tau$$

und wir erhalten:

$$2^3 . f_2 = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4} \mathfrak{P}_\varepsilon,$$

$$f_2 = \prod \vartheta_2(v_\varepsilon, \tau) - \prod \vartheta_1(v_\varepsilon, \tau).$$

Durch Addition ergiebt sich dann die Formel:

$$f_1 + f_2 = 2 \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Aus dieser Formel ergeben sich durch Specialisirungen einfache Transformationsgleichungen. Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir:

$$\vartheta_3^4 + \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = 2(x_0^4 + 8x_0 x_1^3)$$

oder auch:

15) $$\vartheta_3^4 = x_0^4 + 8x_0 . x_1^3,$$

und ähnlich ergiebt sich:

16) $$\begin{cases} \vartheta_3^2 . \vartheta_0^2 = x_0^2 . y_0^2 + 4x_0 . x_1 . y_1^2 - 4x_1^2 . y_0 . y_1, \\ \vartheta_3^2 . \vartheta_2^2 = x_0^2 . z_0^2 + 4x_0 . x_1 . z_1^2 + 4x_1^2 . z_0 . z_1. \end{cases}$$

Ein weiteres Additionstheorem gehört zu dem Schema:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = 1,$	$\mu_3 = 3,$	$\mu_4 = 3$	
3	3	1	1	$m_1 = 6$
3	-3	1	-1	$m_2 = 6$
1	1	-1	-1	$m_3 = 2$
1	-1	-1	1	$m_4 = 2$

und kann geschrieben werden:

17) $$2^4.\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 3\tau)\,\vartheta_3(v_4, 3\tau) = \sum P_\varepsilon,$$

wobei die Congruenzen bestehen:

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv 3s_1 + 3s_2 + 3s_3 + 3s_4 \mod 12, \\ g_2 &\equiv 3s_1 - 3s_2 + 3s_3 - 3s_4 \mod 12, \\ g_3 &\equiv s_1 + s_2 - 3s_3 - 3s_4 \mod 4, \\ g_4 &\equiv s_1 - s_2 - 3s_3 + 3s_4 \mod 4. \end{aligned}$$

Aus diesen Congruenzen folgen die weiteren:

$$g_1 = g_2 \equiv 0 \mod 3,$$

$$g_3 \equiv \frac{g_1}{3} \mod 4, \quad g_4 \equiv \frac{g_2}{3} \mod 4,$$

$$g_1 + g_2 \equiv 0 \mod 2.$$

Um zu einfachen Relationen zu gelangen, setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_3$$

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_3 + \frac{1}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$, w_2 in $w_2 + 1$ über und wir erhalten:

$$2^4.\vartheta_0(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_0(v_3, 3\tau)\,\vartheta_3(v_4, 3\tau) = \sum (-1)^{\frac{g_1+g_2}{6}} P_\varepsilon$$

oder also: $$2^3.f_1 = \sum{}' P_\varepsilon,$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass zu den früheren Beziehungen zwischen den Grössen g noch die weitere hinzukommt:

$$g_1 + g_2 \equiv 2 \mod 4,$$

wobei ferner gesetzt ist:

$$\begin{aligned} f_1 = {} & \vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 3\tau)\,\vartheta_3(v_4, 3\tau) \\ & - \vartheta_0(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_0(v_3, 3\tau)\,\vartheta_3(v_4, 3\tau). \end{aligned}$$

Ferner setzen wir an Stelle von:

$$v_2 \quad , \quad v_4$$

resp.:

$$v_2 + \frac{1}{2}, \quad v_4 + \frac{1}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$, w_2 in $w_2 - 1$ über und wir erhalten:

$$2^3 f_2 = \sum{}'(-1)^{\frac{g_1-g_2}{6}} P_\varepsilon,$$

$$f_2 = \vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_0(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, 3\tau)\vartheta_0(v_4, 3\tau)$$
$$- \vartheta_0(v_1, \tau)\vartheta_0(v_2, \tau)\vartheta_0(v_3, 3\tau)\vartheta_0(v_4, 3\tau).$$

Mithin ergiebt sich durch Subtraction:

$$2^2(f_1 - f_2) = \sum{}'' P_\varepsilon,$$

wobei die zwei Striche an der Summe bedeuten, dass jetzt nur noch die Werthe zu wählen sind:

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 6,$$
$$g_1 = 6, \quad g_2 = 0.$$

Wir setzen endlich an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3 \quad , \quad v_4$$
$$v_1 + \frac{3\tau}{2}, \quad v_2 + \frac{3\tau}{2}, \quad v_3 + \frac{3\tau}{2}, \quad v_4 + \frac{3\tau}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 6\tau$ über und wir erhalten:

$$2^2(f_3 - f_4) = \sum{}''(-1)^{\eta'_1+\eta'_2+\eta'_3+\eta'_4} P_\varepsilon,$$

$$f_3 = \vartheta_2(v_1, \tau)\vartheta_2(v_2, \tau)\vartheta_2(v_3, 3\tau)\vartheta_2(v_4, 3\tau)$$
$$- \vartheta_1(v_1, \tau)\vartheta_2(v_2, \tau)\vartheta_1(v_3, 3\tau)\vartheta_2(v_4, 3\tau),$$

$$f_4 = \vartheta_2(v_1, \tau)\vartheta_1(v_2, \tau)\vartheta_2(v_3, 3\tau)\vartheta_1(v_4, 3\tau)$$
$$- \vartheta_1(v_1, \tau)\vartheta_1(v_2, \tau)\vartheta_1(v_3, 3\tau)\vartheta_1(v_4, 3\tau).$$

Durch Specialisirung dieser und Zusammenfassung derselben mit früheren Formeln ergiebt sich eine Reihe von interessanten Formeln, die zum Theil auch durch Quadrirung der Formel:

$$\vartheta_3 x_0 = \vartheta_0 y_0 + \vartheta_2 z_0$$

entstanden sind. Addiren wir z. B. die Formeln für $2^2(f_1 - f_2)$ und $2^2(f_3 - f_4)$, so erhalten wir:

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 = 4[\vartheta_3(w_1, 6\tau)\vartheta_2(w_2, 6\tau)\vartheta_3(w_3, 2\tau)\vartheta_2(w_4, 2\tau)$$
$$+ \vartheta_2(w_1, 6\tau)\vartheta_3(w_2, 6\tau)\vartheta_2(w_3, 2\tau)\vartheta_3(w_4, 2\tau)]$$

und hieraus durch Nullsetzen der Argumente:

$$\text{18)} \qquad \vartheta_3^2 . x_0^2 - 2\vartheta_3 . \vartheta_0 . x_0 y_0 + \vartheta_0^2 . y_0^2 + \vartheta_2^2 . z_0^2 = R$$
$$R = 8\vartheta_3(0, 6\tau)\vartheta_2(0, 6\tau)\vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_0(0, 2\tau)$$

oder durch Hinzunahme der Formeln der quadratischen Transformation:

$$\text{19)} \qquad \vartheta_3^2 . x_0^2 - 2\vartheta_3 . \vartheta_0 . x_0 . y_0 + \vartheta_0^2 . y_0^2 - \vartheta_2^2 . z_0^2.$$

Wir haben also im Obigen ein Additionstheorem aufgestellt, welches durch Specialisirung eine Formel ergiebt, die der wirklichen Modulargleichung sehr nahe kommt. Es können, wie kaum bemerkt zu werden braucht, mehrere derartige Formeln aufgestellt werden.

Zu ganz ähnlichen Resultaten führt das Additionstheorem:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = 1,$	$\mu_3 = 6,$	$\mu_4 = 6$	
1	1	1	0	$m_1 = 2$
1	-1	0	1	$m_2 = 2$
3	3	-1	0	$m_3 = 6$
3	-3	0	-1	$m_4 = 6.$

Wir schreiben dasselbe:

$$20)\qquad 2^4.\vartheta_3(v_1,\tau)\vartheta_3(v_2,\tau)\vartheta_3(v_3,6\tau)\vartheta_3(v_4,6\tau) = \sum P_\varepsilon,$$

wobei die Congruenzen bestehen:

$$g_1 \equiv s_1 + s_2 + 6s_3 \; mod\, 4,$$
$$g_2 \equiv s_1 - s_2 + 6s_4 \; mod\, 4,$$
$$g_3 \equiv 3s_1 + 3s_2 - 6s_3 \; mod\, 12,$$
$$g_4 \equiv 3s_1 - 3s_2 - 6s_4 \; mod\, 12.$$

Aus denselben folgt:

$$g_1 \equiv \frac{g_3}{3} \, mod\, 4, \quad g_2 \equiv \frac{g_4}{3} \, mod\, 4, \quad g_3 \equiv g_4 \equiv 0 \, mod\, 3, \quad g_3 + g_4 \equiv 0 \, mod\, 2.$$

Wir setzen an Stelle von:

$$v_2 \quad , \; v_3 \quad , \; v_4$$

resp.

$$v_2 + \frac{1}{2}, \; v_3 + \frac{3}{2}, \; v_4 - \frac{3}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$, w_2 in $w_2 - 1$ über und wir erhalten:

$$2^4\vartheta_3(v_1,\tau)\vartheta_0(v_2,\tau)\vartheta_0(v_3,6\tau)\vartheta_0(v_4,6\tau) = \sum (-1)^{\frac{g_1-g_2}{2}} P_\varepsilon.$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$2^3.f_1 = \sum{}' P_\varepsilon,$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass:

$$g_1 - g_2 \equiv 0 \; mod\, 4$$

ist und f_1 die Bedeutung hat:

$$f_1 = \vartheta_3(v_1,\tau)[(\vartheta_3(v_2,\tau)\vartheta_3(v_3,6\tau)\vartheta_3(v_4,6\tau) + \vartheta_0(v_2,\tau)\vartheta_0(v_3,6\tau)\vartheta_0(v_4,6\tau)].$$

Wir setzen zweitens an Stelle von:

$$v_1 \quad , \; v_3 \quad , \; v_4 \quad ,$$
$$v_1 + \frac{1}{2}, \; v_3 + \frac{3}{2}, \; v_4 + \frac{3}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$, w_2 in $w_2 + 1$ über und wir erhalten:

$$2^3.f_2 = \sum{}' (-1)^{\frac{g_1+g_2}{2}} P_\varepsilon,$$

$$f_2 = \vartheta_0(v_1,2\tau)[\vartheta_3(v_2,\tau)\vartheta_0(v_3,6\tau)\vartheta_0(v_4,6\tau) + \vartheta_0(v_2,\tau)\vartheta_3(v_3,6\tau)\vartheta_3(v_4,6\tau)].$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$2^2(f_1 + f_2) = \sum'' P_\varepsilon,$$

wobei der doppelte Strich an der Summe bedeutet, dass über die Werthe zu summiren ist:

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0,$$
$$g_1 = 2, \quad g_2 = 2.$$

Um zu besonders einfachen Resultaten zu gelangen setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \; v_2 \quad , \; v_3$$

resp.

$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_2 + \frac{\tau}{2}, \quad v_3 + 3\tau,$$

so geht w_1 in $w_1 + 2\tau$ über und wir erhalten:

$$2^2(f_3 - f_4) = \sum''(-1)^{\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3} P_\varepsilon,$$

$$f_3 = \vartheta_2(v_1, 2\tau)[\vartheta_2(v_2, 2\tau)\vartheta_2(v_3, 6\tau)\vartheta_3(v_4, 6\tau) - \vartheta_1(v_2, 2\tau)\vartheta_1(v_3, 6\tau)\vartheta_0(v_4, 6\tau)],$$
$$f_4 = \vartheta_1(v_1, 2\tau)[\vartheta_2(v_2, 2\tau)\vartheta_1(v_3, 6\tau)\vartheta_0(v_4, 6\tau) + \vartheta_1(v_2, 2\tau)\vartheta_2(v_3, 6\tau)\vartheta_3(v_4, 6\tau)].$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$2(f_1 + f_2 + f_3 - f_4) = \sum''' P_\varepsilon,$$

wobei die drei Striche an der Summe bedeuten, dass über diejenigen η' zu summiren ist, für welche:

$$\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3$$

gerade ist.

Endlich setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \; v_2 \quad , \; v_4$$

$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_2 - \frac{\tau}{2}, \quad v_4 + 3\tau \qquad .$$

so wird:

$$2(f_5 - f_6 + f_7 + f_8) = \sum'''(-1)^{\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_4} P_\varepsilon,$$

wobei die Grössen f die Bedeutung haben:

$$f_5 = \vartheta_2(v_1, \tau)[\vartheta_2(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, 6\tau)\vartheta_2(v_4, 6\tau) + \vartheta_1(v_2, \tau)\vartheta_0(v_3, 6\tau)\vartheta_1(v_4, 6\tau)],$$
$$f_6 = \vartheta_1(v_1, \tau)[\vartheta_2(v_2, \tau)\vartheta_0(v_3, 6\tau)\vartheta_1(v_4, 6\tau) - \vartheta_1(v_2, \tau)\vartheta_3(v_3, 6\tau)\vartheta_2(v_4, 6\tau)],$$
$$f_7 = \vartheta_3(v_1, \tau)[\vartheta_3(v_2, \tau)\vartheta_2(v_3, 6\tau)\vartheta_2(v_4, 6\tau) - \vartheta_0(v_2, \tau)\vartheta_1(v_3, 6\tau)\vartheta_1(v_4, 6\tau)],$$
$$f_8 = \vartheta_0(v_1, \tau)[\vartheta_3(v_2, \tau)\vartheta_1(v_3, 6\tau)\vartheta_1(v_4, 6\tau) - \vartheta_0(v_2, \tau)\vartheta_2(v_3, 6\tau)\vartheta_2(v_4, 6\tau)].$$

Addiren wir, so erhalten wir die elegante Formel:

$$\sum_1^8{}_\varepsilon \pm f_\varepsilon = 4[\vartheta_3(w_1, 2\tau)\vartheta_3(w_2, 2\tau)\vartheta_3(w_3, 6\tau)\vartheta_3(w_4, 6\tau)$$
$$+ \vartheta_2(w_1, 2\tau)\vartheta_2(w_2, 2\tau)\vartheta_2(w_3, 6\tau)\vartheta_2(w_4, 6\tau)].$$

Durch Specialisirung ergeben sich eine Reihe interessanter Relationen. Setzen wir die Argumente z. B. alle der Null gleich, so nimmt die linke Seite die Form an:

$$\vartheta_3^2.\vartheta_3^2(0,6\tau)+\vartheta_0^2.\vartheta_3^2(0,6\tau)+\vartheta_3^2.\vartheta_2^2(0,6\tau)-\vartheta_0^2.\vartheta_2^2(0,6\tau)$$
$$+2\vartheta_3.\vartheta_0.\vartheta_0^2(0,6\tau)+2\vartheta_2^2.\vartheta_2(0,6\tau)\vartheta_3(0,6\tau),$$

während die rechte wird:

$$4[\vartheta_3^2(0,2\tau)\vartheta_3^2(0,6\tau)+\vartheta_2^2(0,2\tau)\vartheta_2^2(0,6\tau)].$$

Setzen wir:

$$\vartheta_3^2=\vartheta_3^2(0,2\tau)+\vartheta_2^2(0,2\tau),$$
$$\vartheta_0^2=\vartheta_3^2(0,2\tau)-\vartheta_2^2(0,2\tau),$$
$$\vartheta_0\vartheta_3=\vartheta_0^2(0,2\tau),$$
$$\vartheta_2^2=2\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_3(0,2\tau),$$

so erhalten wir, wenn noch links und rechts an Stelle von $2\tau:\tau$ gesetzt wird die Transformationsgleichung:

$$21)\quad \vartheta_3^2.\vartheta_3^2(0,3\tau)+\vartheta_2^2.\vartheta_2^2(0,3\tau)-2\vartheta_2.\vartheta_3.\vartheta_2(0,3\tau)\vartheta_3(0,3\tau)=\vartheta_0^2.\vartheta_0^2(0,3\tau),$$

eine Gleichung, welche durch Quadriren aus der Gleichung erhalten wird:

$$\vartheta_3.\vartheta_3(0,3\tau)=\vartheta_0.\vartheta_0(0,3\tau)+\vartheta_2.\vartheta_2(0,3\tau).$$

So haben wir in den beiden letzten Additionstheoremen Formeln erhalten, die durch Specialisirung unmittelbar einfache Modularbeziehungen ergeben und zwar solche, die durch Quadriren aus der zuletzt hingeschriebenen Gleichung entstehen. Mit diesen Theoremen sind wir also den wirklichen Modulargleichungen einen Schritt näher gekommen. Sehen wir von weiteren Additionstheoremen ab, die im Wesentlichen dasselbe leisten, so können wir uns sofort zu dem folgenden wenden, welches zu dem Schema gehört:

$\mu_1=1,$	$\mu_2=2,$	$\mu_3=1,$	$\mu_4=2$	
2	1	2	1	$m_1=3$
2	-2	2	-2	$m_2=6$
2	1	-2	-1	$m_3=3$
2	-2	-2	2	$m_4=6$

Dasselbe möge etwas näher durchgeführt werden. Wir schreiben analog wie früher das Theorem:

$$22)\qquad 2^4.\vartheta_3(v_1,\tau)\vartheta_3(v_2,2\tau)\vartheta_3(v_3,\tau)\vartheta_3(v_4,2\tau)=\sum P_\varepsilon,$$

wobei aus den Congruenzen, denen die Grössen g Genüge leisten, die folgenden Beziehungen sich ergeben:

$$g_3\equiv g_4\ mod\ 6,\quad g_2\equiv 0\ mod\ 2,$$
$$g_1\equiv g_2\ mod\ 6,\quad g_4\equiv 0\ mod\ 2,$$
$$g_2\equiv g_4\ mod\ 4.$$

Wir verfahren nun ähnlich wie früher und setzen an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_3$$

resp.:

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_3 + \frac{1}{2},$$

so tritt an Stelle von:

$$w_1 \quad , \quad w_2$$

resp.:

$$w_1 + 1, \quad w_2 + 1$$

und wir erhalten:

$$2^4 . \vartheta_0(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, 2\tau)\vartheta_0(v_3, \tau)\vartheta_3(v_4, 2\tau) = \sum (-1)^{\left(\frac{g_1}{3} + \frac{g_2}{6}\right)} P_\varepsilon.$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$2^3 . f_1 = \sum \mathfrak{P}_\varepsilon,$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1 = \vartheta_3(v_2, 2\tau)\vartheta_3(v_4, 2\tau)[\vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_3, \tau) + \vartheta_0(v_1, \tau)\vartheta_0(v_3, \tau)],$$

$$\mathfrak{P}_\varepsilon = \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau)$$

und die Grössen $\mathfrak{g}_\varepsilon$ den Congruenzen Genüge leisten:

$$\mathfrak{g}_2 \equiv \mathfrak{g}_4 \equiv 0 \, mod\, 2, \quad \mathfrak{g}_1 \equiv \mathfrak{g}_2 \, mod\, 3, \quad \mathfrak{g}_3 \equiv \mathfrak{g}_4 \, mod\, 3.$$

Wir gehen auch hier noch einen Schritt weiter und setzen an Stelle von:

$$v_2 \text{ und } v_4$$

resp.:

$$v_2 + 3\tau, \quad v_4 + 3\tau,$$

so gehen w_1 und w_2 über in $w_1 + 3\tau$ und $w_2 - 6\tau$. Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$2^3 . f_2 = \sum (-1)^{\eta'_2 + \eta'_4} \mathfrak{P}_\varepsilon,$$

$$f_2 = \vartheta_2(v_2, 2\tau)\vartheta_2(v_4, 2\tau)[\vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_3, \tau) + \vartheta_0(v_1, \tau)\vartheta_0(v_3, \tau)].$$

Durch Addition ergiebt sich die Formel:

$$2^2(f_1 + f_2) = \sum{}' \mathfrak{P}_\varepsilon,$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass nur über diejenigen η zu summiren ist, für welche

$$\eta'_2 + \eta'_4$$

gerade ist. Unter Hinzunahme der quadratischen Transformation ergeben sich dann durch Specialisirung einfache Transformationsgleichungen. Setzen wir z. B. die Argumente gleich Null, so erhalten wir:

$$23) \quad \vartheta_3^4 + \vartheta_0^2\vartheta_3^2 = x_0^4 + 8x_0x_1^3 + x_0^2y_0^2 + 4x_1y_1(x_0y_1 - x_1y_0),$$

eine Formel, die auch aus früheren entwickelt werden kann. Es hat dieses Additionstheorem die Eigenthümlichkeit, dass es durch Specialisirung Formeln ergiebt, die durch Fortschaffen von Irrationalitäten aus Gleichungen sich ergeben, die Ausfluss des Theorems sind:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, 2\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](2v_1 + v_2, 6\tau)\vartheta_3[g_2](v_1 - v_2, 3\tau).$$

Diese Additionstheoreme zwischen Producten von vier Factoren mögen genügen.

Wir kommen zu Additionstheoremen zwischen Producten von sechs Factoren.

Hier bietet sich zunächst ein Theorem dar, welches lautet resp. zu dem Schema gehört:

$\mu_1 = 1$,	$\mu_2 = 1$,	$\mu_3 = 1$,	$\mu_4 = 1$,	$\mu_5 = 3$,	$\mu_6 = 3$	
0,	2,	1,	1,	1,	1	$m_1 = 3$,
0,	-2,	-1,	-1,	1,	1	$m_2 = 3$,
2,	0,	1,	-1,	1,	-1	$m_3 = 3$,
-2,	0,	-1,	1,	1,	-1	$m_4 = 3$,
2,	0,	-2,	2,	0,	0	$m_5 = 3$,
0,	2,	-2,	-2,	0,	0	$m_6 = 3$.

Wir schreiben das Theorem:

$$24)\qquad 2^6.\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6} \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum P_\varepsilon,$$

wobei die Grössen g, wie leicht nachzuweisen ist, den Congruenzen Genüge leisten müssen:

$$g_2 \equiv -g_1 \; mod\, 6, \qquad g_4 \equiv -g_3 \; mod\, 6,$$
$$g_5 \equiv -2g_3 \; mod\, 6, \qquad g_6 \equiv -2g_1 \; mod\, 6.$$
$$g_1 + g_3 \equiv 0 \; mod\, 2.$$

Wir setzen an Stelle von:

$$v_3 \quad, v_4 \quad, v_5 \quad, v_6$$

resp.:

$$v_3 + \frac{1}{2}, \quad v_4 + \frac{1}{2}, \quad v_5 + \frac{1}{2}, \quad v_6 + \frac{1}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$, w_6 in $w_6 - 1$ über und wir erhalten:

$$2^6.\vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, \tau)\vartheta_0(v_3, \tau)\vartheta_0(v_4, \tau)\vartheta_0(v_5, 3\tau)\vartheta_0(v_6, 3\tau) = \sum(-1)^{g_1} P_\varepsilon.$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$2^5.f_1 = \sum \mathfrak{P}_\varepsilon,$$

wobei gesetzt ist:

$$\mathfrak{P}_\varepsilon = \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau)$$

die Grössen $\mathfrak{g}_\varepsilon$ den Congruenzen Genüge leisten:

$$\mathfrak{g}_2 \equiv -\mathfrak{g}_1 \; mod\, 3, \quad \mathfrak{g}_4 \equiv -\mathfrak{g}_3 \; mod\, 3, \quad \mathfrak{g}_5 \equiv -2\mathfrak{g}_3 \; mod\, 3, \quad \mathfrak{g}_6 \equiv -2\mathfrak{g}_1 \; mod\, 3$$

und f_1 den Werth hat:

$$f_1 = \vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, \tau)\left[\prod_{\varepsilon=3}^{\varepsilon=6} \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) + \prod_{\varepsilon=3}^{\varepsilon=6} \vartheta_0(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau)\right].$$

Um zu besonders einfachen Relationen zu gelangen, vermehren wir die Grössen v_3, v_4, v_5, v_6 um je $\frac{3\tau}{2}$, so wird w_1 in $w_1 + 3\tau$, w_6 in $w_6 - 3\tau$ übergehen und wir erhalten:

$$2^5 . f_2 = \sum'(-1)^{\eta'_3+\eta'_4+\eta'_5+\eta'_6}\mathfrak{P}_\varepsilon,$$

wobei f_2 den Werth besitzt:

$$f_2 = \vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\left[\prod_{\varepsilon=3}^{\varepsilon=6}\vartheta_2(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon\tau) + \prod_{\varepsilon=3}^{\varepsilon=6}\vartheta_1(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon\tau)\right].$$

Addiren wir die Ausdrücke für f_1 und f_2, so ergiebt sich die elegante Formel:

$$2^4(f_1 + f_2) = \sum'\mathfrak{P}_\varepsilon,$$

wo der Strich an der Summe bedeutet, dass über diejenigen η' zu summiren ist, für welche:

$$\eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_5 + \eta'_6$$

eine gerade Zahl ist.

Auch hier ergeben sich durch Specialisirung einfache Transformationsgleichungen. Setzen wir z. B. die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Formel:

$$25)\quad \vartheta_3^2(\vartheta_3^2 . x_0^2 + \vartheta_0^2 . y_0^2 + \vartheta_2^2 . z_0^2) = 2(x_0^6 + 4x_0^3 . x_1^3 + 4x_1^6),$$

die aus einer der früheren Gleichungen durch Quadrirung hätte gewonnen werden können.

In ähnlicher Weise kann man weitergehen — indessen begnügen wir uns damit, drei weitere Additionstheoreme zwischen Producten von sechs Factoren anzugeben, ohne sie weiter auszuführen.

Das erste gehört zu dem Schema:

$\mu_1 = 1$,	$\mu_2 = 1$,	$\mu_3 = 1$,	$\mu_4 = 3$,	$\mu_5 = 3$,	$\mu_6 = 3$	
1,	1,	1,	1,	1,	1	$m_1 = 3$,
−1,	−1,	−1,	1,	1,	−1	$m_2 = 3$,
−1,	−1,	−1,	1,	−1,	1	$m_3 = 3$,
−1,	−1,	−1,	−1,	1,	1	$m_4 = 3$,
4,	−2,	−2,	0,	0,	0	$m_5 = 6$,
0,	2,	−2,	0,	0,	0	$m_6 = 2$.

Das zweite entspricht dem Schema:

$\mu_1 = 1$,	$\mu_2 = 1$,	$\mu_3 = 1$,	$\mu_4 = 1$,	$\mu_5 = 1$,	$\mu_6 = 1$	
2,	2,	1,	1,	1,	1	$m_1 = 3$,
2,	−2,	1,	−1,	−1,	1	$m_2 = 3$,
1,	1,	−1,	−1,	−1,	−1	$m_3 = 6$,
1,	−1,	−1,	1,	1,	−1	$m_4 = 6$,
0,	0,	1,	−1,	1,	−1	$m_5 = 1$,
0,	0,	1,	1,	−1,	−1	$m_6 = 1$.

Das dritte und letzte endlich kann dem Schema zugeordnet werden:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = 1,$	$\mu_3 = 1,$	$\mu_4 = 2,$	$\mu_5 = 2,$	$\mu_6 = 2$	
2,	2,	0,	1,	1,	0	$m_1 = 3,$
2,	2,	0,	−2,	−2,	0	$m_2 = 6,$
−1,	1,	2,	1,	−1,	1	$m_3 = 3,$
−1,	1,	−2,	1,	−1,	−1	$m_4 = 3,$
−2,	2,	0,	−1,	1,	0	$m_5 = 3,$
0,	0,	2,	0,	0,	−2	$m_6 = 3.$

Unter den Additionstheoremen, die zwischen Producten von acht Factoren bestehen, wollen wir zunächst das folgende ausführlich betrachten:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = 3,$	$\mu_3 = 1,$	$\mu_4 = 3,$	$\mu_5 = 1,$	$\mu_6 = 3,$	$\mu_7 = 1,$	$\mu_8 = 3$	
3,	1,	3,	1,	0,	0,	0,	0	$m_1 = 6,$
1,	−1,	1,	−1,	0,	0,	0,	0	$m_2 = 2,$
0,	0,	0,	0,	3,	1,	3,	1	$m_3 = 6,$
0,	0,	0,	0,	1,	−1,	1,	−1	$m_4 = 2,$
3,	1,	−3,	−1,	0,	0,	0,	0	$m_5 = 6,$
1,	−1,	−1,	1,	0,	0,	0,	0	$m_6 = 2,$
0,	0,	0,	0,	3,	1,	−3,	−1	$m_7 = 6,$
0,	0,	0,	0,	1,	−1,	−1,	1	$m_8 = 2.$

Wir schreiben das Additionstheorem:

$$2^8 . f_1 = \sum P_\varepsilon, \tag{26}$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1 = \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=8} \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) \quad .$$

und P_ε die frühere Bedeutung hat, nur dass nach ε von 1 bis 8 zu multipliciren ist.

Die Grössen g_ε leisten den Congruenzen Genüge:

$$g_1 \equiv g_5 \equiv 0 \; mod \, 3, \qquad g_3 \equiv g_7 \equiv 0 \; mod \, 3,$$
$$g_1 \equiv g_5 \; mod \, 6, \qquad g_3 \equiv g_7 \; mod \, 6,$$
$$g_1 \equiv g_2 \equiv g_5 \equiv g_6 \; mod \, 2, \quad g_3 \equiv g_4 \equiv g_7 \equiv g_8 \; mod \, 2.$$

Setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3 \quad , \quad v_4$$

resp.:

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_2 + \frac{1}{2}, \quad v_3 + \frac{1}{2}, \quad v_4 + \frac{1}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 2$ über und wir erhalten:

wobei gesetzt ist:
$$2^8 . f_2 = \sum (-1)^{g_1} P_\varepsilon,$$
$$f_2 = \vartheta_0(v_1,\tau)\vartheta_0(v_2,3\tau)\vartheta_0(v_3,\tau)\vartheta_0(v_4,3\tau)\vartheta_3(v_5,\tau)\vartheta_3(v_6,3\tau)\vartheta_3(v_7,\tau)\vartheta_3(v_8,3\tau).$$

Durch Addition ergiebt sich:
$$2^7(f_1 + f_2) = \sum{}' P_\varepsilon,$$
wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass g_1 eine gerade Zahl sein muss.

Setzen wir ferner:
$$f_3 = \vartheta_3(v_1,\tau)\vartheta_3(v_2,3\tau)\vartheta_3(v_3,\tau)\vartheta_3(v_4,3\tau)\vartheta_0(v_5,\tau)\vartheta_0(v_6,3\tau)\vartheta_0(v_7,\tau)\vartheta_0(v_8,3\tau),$$
$$f_4 = \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=8} \vartheta_0(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau),$$
so wird analog wie vorhin:
$$2^7(f_3 + f_4) = \sum{}' (-1)^{g_1} P_\varepsilon$$
oder also:
$$2^6(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = 2^6 . F_1 = \sum \mathfrak{P}_\varepsilon,$$
wenn wir die Bezeichnungsweise einführen:
$$\mathfrak{P}_\varepsilon = \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$
$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3 \equiv \mathfrak{g}_5 = \mathfrak{g}_7 \equiv 0 \; mod \; 3.$$

Nehmen wir an, dass F_2 aus F_1 entsteht, indem in den vier ersten Factoren eines jeden Productes an Stelle der Indices 3 und 0 resp. 2 und 1 gesetzt wird, so ergiebt sich auf ähnlichem Wege wie vorhin:
$$2^6 . F_2 = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4} \mathfrak{P}_\varepsilon,$$
sodass wir erhalten:
$$2^5(F_1 - F_2) = \sum{}' \mathfrak{P}_\varepsilon,$$
wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass nur über diejenigen η' zu summiren ist, für welche:
$$\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4$$
eine ungerade Zahl ist.

Setzen wir ferner in den Ausdrücken für F_1 und F_2 in den vier letzten Factoren eines jeden Productes an Stelle der Indices 3 und 0 die Indices 2 und 1 und nehmen an, dass hierbei F_1 in F_3, F_2 in F_4 übergeht, so ergiebt sich:
$$2^5(F_3 - F_4) = \sum{}' (-1)^{\eta'_5 + \eta'_6 + \eta'_7 + \eta'_8} \mathfrak{P}_\varepsilon,$$
also wird durch Subtraction:
$$2^4(F_1 - F_2 - F_3 + F_4) = \sum{}'' \mathfrak{P}_\varepsilon,$$
wo nun der doppelte Index bedeutet, dass sowohl:
$$\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4$$
als auch:
$$\eta'_5 + \eta'_6 + \eta'_7 + \eta'_8$$
ungerade Zahlen sein müssen.

Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir rechts:

$$2^6 . \vartheta_0^4(0, 6\tau)\, \vartheta_0^4(0, 2\tau) = 2^6 . \vartheta_3^2(0, 3\tau)\, \vartheta_0^2(0, 3\tau)\, \vartheta_3^2(0, \tau)\, \vartheta_0^2(0, \tau).$$

Die linke Seite wird:

$$2^4 (x_0^4 . \vartheta_3^4 + y_0^4 . \vartheta_3^4 + z_0^4 . \vartheta_2^4 + 2 x_0^2 . y_0^2 . \vartheta_3^2 . \vartheta_0^2 \\ - 2 y_0^2 . z_0^2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_2^2 - 2 z_0^2 . x_0^2 . \vartheta_3^2 . \vartheta_2^2).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Modularbeziehung:

$$27) \quad \begin{cases} x_0^4 . \vartheta_3^4 + y_0^4 . \vartheta_3^4 + z_0^4 . \vartheta_2^4 - 2 x_0^2 . y_0^2 . \vartheta_3^2 . \vartheta_0^2 \\ \quad - 2 y_0^2 . z_0^2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_2^2 - 2 z_0^2 . x_0^2 . \vartheta_2^2 . \vartheta_3^2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung führt mit wenigen Schlüssen zu der gewöhnlichen Modulargleichung zwischen $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$ und $\frac{\vartheta_2(0, 3\tau)}{\vartheta_3(0, 3\tau)}$. Wir haben dazu nur nöthig, an Stelle von τ durchweg $\frac{\tau}{2}$ zu setzen und die Beziehungen zu berücksichtigen:

$$\vartheta_3^2\left(0, \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_3^2 + \vartheta_2^2,$$

$$\vartheta_0^2\left(0, \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_3^2 - \vartheta_2^2,$$

$$\vartheta_2^2\left(0, \frac{\tau}{2}\right) = 2 \vartheta_2 . \vartheta_3.$$

Es kann nun noch eine grosse Fülle weiterer Additionstheoreme zwischen Producten von acht Factoren aufgestellt werden. Wir begnügen uns damit, die Schemata aufzustellen, zu welchen einige von ihnen gehören, ohne die Theoreme selbst näher durchzuführen und für die Transformationstheorie zu verwerthen. Nimmt man die Zahlen μ alle gleich 1 an, die Zahlen m alle gleich 3, so gehört zu dem Schema der Grössen a:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

das Additionstheorem:

$$28) \quad \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, 3\tau),$$

wobei die Producte nach ε von 1 bis 8 zu nehmen sind.

Ferner gehört zu dem Schema:

2	2	1	1	1	1	0	0
2	−2	1	−1	−1	1	0	0
1	1	−2	−2	0	0	1	1
1	−1	−2	2	0	0	1	−1
1	1	0	0	−2	−2	−1	−1
1	−1	0	0	2	−2	1	−1
0	0	1	1	−1	−1	2	2
0	0	1	−1	−1	1	2	−2

das Additionstheorem:

$$29)\qquad \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, 3\tau).$$

Endlich möge auf das Additionstheorem aufmerksam gemacht werden, welches zu dem Schema gehört:

$\mu_1 = 1$,	$\mu_2 = 3$,	$\mu_3 = 1$,	$\mu_4 = 3$,	$\mu_5 = 1$,	$\mu_6 = 3$,	$\mu_7 = 1$,	$\mu_8 = 3$	
3,	1,	3,	1,	3,	1,	3,	1	$m_1 = 12$,
1,	−1,	1,	−1,	1,	−1,	1,	−1	$m_2 = 4$,
3,	1,	−3,	−1,	3,	1,	−3,	−1	$m_3 = 12$,
1,	−1,	−1,	1,	1,	−1,	−1,	1	$m_4 = 4$,
3,	1,	3,	1,	−3,	−1,	−3,	−1	$m_5 = 12$,
1,	−1,	1,	−1,	−1,	1,	−1,	1	$m_6 = 4$,
3,	1,	−3,	−1,	−3,	−1,	3,	1	$m_7 = 12$
1,	−1,	−1,	1,	−1,	1,	1,	−1	$m_8 = 4$.

So könnten wir weitergehen, indessen mögen die bisherigen Theoreme genügen. Jedenfalls geht aus ihnen hervor, dass wir Transformationsgleichungen in grösserer Zahl als specielle Fälle allgemeinerer Gleichungen herleiten können, darunter solche, die mit wenigen Schlüssen zu der eigentlichen Modulargleichung zwischen:

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_2(0, 3\tau)}{\vartheta_3(0, 3\tau)}$$

überführen.

Die gewöhnliche Multiplicatorgleichung kann, wie unmittelbar klar, auf diesem Wege nicht ohne Weiteres hergestellt werden — wohl aber können wir Theoreme aufstellen, die durch Specialisirung Beziehungen zwischen den Wurzeln der Multiplicatorgleichung ergeben. Dabei genügen unsere Betrachtungen unmittelbar, um alle Coefficienten der Multiplicatorgleichung, mit Ausnahme eines einzigen, zu berechnen.

In der That, als Wurzeln der Multiplicatorgleichung können und wollen wir die folgenden Grössen zu Grunde legen:

$$30)\quad \begin{cases} M_\xi = \vartheta_3^2\left(0, \dfrac{\tau+16\xi}{n}\right) : \vartheta_3^2(0,\tau), \\ M_{n+1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\vartheta_3^2(0, n\tau) : \vartheta_3^2(0,\tau), \end{cases}$$

wobei n als ungerade Primzahl angesehen wird.

Nun hatten wir gefunden:

$$31)\quad \vartheta_3\left(v, \frac{\tau+2^n\varrho}{n}\right) = \sum_{g=0}^{g=n-1} \alpha^{\varrho g^2} \vartheta_3[g](nv, n\tau)$$

und umgekehrt:

$$32)\quad \vartheta_3[g](nv, n\tau) + \vartheta_3[-g](nv, n\tau) = \frac{1}{n}\sum \alpha^{-\varrho g^2} \vartheta_3\left(v, \frac{\tau+2^n\varrho}{n}\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Setzen wir in diesen Formeln $v=0$, so erhalten wir die Beziehungen:

$$33)\quad \vartheta_3\left(0, \frac{\tau+2^n\varrho}{n}\right) = \vartheta_3(0, n\tau) + 2\sum_{g=1}^{g=\frac{n-1}{2}} \alpha^{\varrho g^2} \vartheta_3[g](0, n\tau),$$

$$34)\quad 2\vartheta_3[g](0, n\tau) = \frac{1}{n}\sum \alpha^{-\varrho g^2} \vartheta_3\left(0, \frac{\tau+2^n\varrho}{n}\right).$$

Aus diesen Beziehungen folgt unmittelbar, dass wenn n eine ungerade Primzahl von der Form $4r+3$ ist, jedenfalls:

$$\sum M = 0$$

sein muss, oder also wir erhalten den

Lehrsatz: In einer jeden Multiplicatorgleichung, bei welcher der Transformationsgrad eine Primzahl von der Form $4r+3$ ist, besitzt der Coefficient von M^n den Werth Null.

Nun folgt ferner für $n=3$ unmittelbar:

$$\vartheta_3^4\left(0, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right) = x_0^4 + 8\alpha^\varrho . x_0^3 . x_1 + 24\alpha^{2\varrho} . x_0^2 . x_1^2 + 32 x_0 . x_1^3 + 16\alpha^\varrho . x_1^4.$$

Hieraus folgt durch Anwendung unserer Additionstheoreme:

$$\vartheta_3^4(0,\tau)\sum M^2 = 12(x_0^4 + 8x_0x_1^3) = 12\vartheta_3^4(0,\tau),$$

oder also:

$$35)\quad \sum M^2 = 12,$$

sodass die zweite Potenzsumme unmittelbar bestimmt ist.

Ebenso einfach folgt:

$$\vartheta_3^8 \sum M^4 = 84(x_0^4 + 8x_0 . x_1^3)^2 = 84\vartheta_3^8,$$

oder also:

36) $$\sum M^4 = 84.$$

Es zeigt sich also, dass unsere Betrachtungen unmittelbar zu der Berechnung von drei Coefficienten der Multiplicatorgleichung führen, sodass nur noch ein Coefficient unbestimmt bleibt. Zu demselben Resultat kommen wir durch die folgende Betrachtung. Es ist:

$$\vartheta_3^6 \sum M^3 = 24(-x_0^6 + 20 . x_0^3 . x_1^3 + 8x_1^6).$$

Wir wollen diesen Ausdruck durch c bezeichnen. Erwägen wir nun die Beziehung:

$$x_0^2 = -\frac{\vartheta_3^2 . M}{3},$$

so erhalten wir für M die Gleichung:

37) $$M^4 - 6 . M^2 - \frac{c . M}{3\vartheta_3^6} - 3 = 0$$

und das ist die Multiplicatorgleichung, die zu der Transformation dritten Grades gehört, wobei freilich noch ein Coefficient unbestimmt bleibt.

§ 3.

Die Transformation fünften Grades.

Es soll nun in ähnlicher Weise die Transformation fünften Grades untersucht werden. Für den Fall von zwei Factoren erhalten wir das Additionstheorem:

1) $$\vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, \tau) = \sum \vartheta_3[g_1](v_1 + 2v_2, 5\tau)\vartheta_3[g_2](2v_1 - v_2 5\tau),$$
$$g_1 + 2g_2 \equiv 0 \mod 5.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $v_1 = v_2 = 0$, so erhalten wir die Multiplicatorbeziehung:

2) $$\vartheta_3^2 = x_0^2 + 4x_1 x_2.$$

Unter den Additionstheoremen, die zwischen Producten von drei Factoren bestehen, heben wir die folgenden hervor.

Erstens besteht die Gleichung:

3) $$2^3 . \vartheta_3(v_1, \tau)\vartheta_3(v_2, 2\tau)\vartheta_3(v_3, 5\tau) = \sum P_\varepsilon,$$

$$P_\varepsilon = \vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1 + \eta_1, 2\tau)\vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2 + \eta_2, 4\tau)\vartheta_3\left[\frac{g_3}{2}\right](w_3 + \eta_3, 20\tau),$$

wobei die Grössen w, η, g durch das Schema von Transformationszahlen bestimmt sind:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 1. \end{matrix}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_1 \equiv \frac{g_3}{5} \, mod\, 4, \quad g_2 \equiv \frac{3g_3}{5} \, mod\, 8, \quad g_3 \equiv 0 \, mod\, 5.$$

Wir wollen nun ähnlich wie früher die Methode der Substitution halber Perioden anwenden, um zu einfachen Relationen zu gelangen. Wir setzen an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_3$$

resp.:

$$v_1 - \frac{1}{2}, \quad v_3 - \frac{1}{2},$$

so ändern w_2 und w_3 sich um 1.

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$2^3 . \vartheta_0(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, 2\tau)\, \vartheta_0(v_3, 5\tau) = \sum (-1)^{g_1} P_g ,$$

wenn wir berücksichtigen, dass die Congruenz besteht:

$$g_2 + \frac{g_3}{5} \equiv 4 g_1 \, mod\, 8.$$

Durch Addition ergiebt sich dann:

$$4 . f_1 = \sum \vartheta_3[\mathfrak{g}_1](w_1 + \eta_1, 2\tau)\, \vartheta_3[\mathfrak{g}_2](w_2 - \eta_2, 4\tau)\, \vartheta_3[\mathfrak{g}_3](w_3 + \eta_3, 20\tau),$$

wobei jetzt die Congruenzen bestehen:

$$\mathfrak{g}_1 \equiv \frac{\mathfrak{g}_3}{5} \, mod\, 2, \quad \mathfrak{g}_2 \equiv \frac{3\mathfrak{g}_3}{5} \, mod\, 4, \quad \mathfrak{g}_3 \equiv 0 \, mod\, 5,$$

wobei ferner gesetzt ist:

$$f_1 = \vartheta_3(v_2, 2\tau)[\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_3, 5\tau) - \vartheta_0(v_1, \tau)\, \vartheta_0(v_3, 5\tau)].$$

Setzen wir ferner an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3$$

resp.:

$$v_1 - \frac{\tau}{2}, \quad v_2 - \tau, \quad v_3 - \frac{5\tau}{2},$$

so ändert sich w_2 um 2τ. Mithin ergiebt sich:

$$4 . f_2 = \sum (-1)^{\eta'_1 - \eta'_2 - \eta'_3} \vartheta_3[\mathfrak{g}_1](w_1 - \eta_1, 2\tau)\, \vartheta_3[\mathfrak{g}_2](w_2 - \eta_2, 4\tau)\, \vartheta_3[\mathfrak{g}_3](w_3 - \eta_3, 20\tau),$$

$$f_2 = \vartheta_2(v_2, 2\tau)[\vartheta_2(v_1, \tau)\, \vartheta_2(v_3, 5\tau) - \vartheta_1(v_1, \tau)\, \vartheta_1(v_3, 5\tau)].$$

Durch Subtraction erhalten wir:

$$2(f_1 - f_2) = \sum{}' \vartheta_3[\mathfrak{g}_1](w_1 - \eta_1, 2\tau)\, \vartheta_3[\mathfrak{g}_2](w_2 - \eta_2, 4\tau)\, \vartheta_3[\mathfrak{g}_3](w_3 - \eta_3, 20\tau),$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass $\eta'_1 - \eta'_2 - \eta'_3$ stets gleich 1 anzunehmen ist. Die Summe enthält demnach nur Glieder, die den Werthen entsprechen:

$$\mathfrak{g}_1 = 0, \quad \mathfrak{g}_2 = 0, \quad \mathfrak{g}_3 = 0,$$
$$\mathfrak{g}_1 = 0, \quad \mathfrak{g}_2 = 2, \quad \mathfrak{g}_3 = 10,$$
$$\mathfrak{g}_1 = 1, \quad \mathfrak{g}_2 = 3, \quad \mathfrak{g}_3 = 5,$$
$$\mathfrak{g}_1 = 1, \quad \mathfrak{g}_2 = 1, \quad \mathfrak{g}_3 = 15.$$

Die soeben erhaltene Formel ergiebt durch Specialisirung eine ganze Reihe eleganter Beziehungen, darunter solche, die schon von Schröter in seinen citirten Arbeiten aufgestellt worden sind. Setzen wir die Argumente sämmtlich der Null gleich, so erhalten wir die Modulargleichung:

$$4) \quad 2 \,.\, \vartheta_0(0,2\tau)\,\vartheta_0(0,4\tau)\,\vartheta_0(0,20\tau) = \vartheta_3(0,\tau)\,\vartheta_3(0,2\tau)\,\vartheta_3(0,5\tau) + \vartheta_0(0,\tau)\,\vartheta_0(0,2\tau)\,\vartheta_0(0,5\tau) - \vartheta_2(0,\tau)\,\vartheta_2(0,2\tau)\,\vartheta_2(0,5\tau).$$

In ähnlicher Weise ist das Additionstheorem zu untersuchen:

$$5) \qquad 8 \,.\, \vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,5\tau)\,\vartheta_3(v_3,10\tau) = \sum' P_\varepsilon,$$

$$P_\varepsilon = \vartheta_3\begin{bmatrix}\frac{g_1}{2}\end{bmatrix}(w_1+\eta_1,4\tau)\,\vartheta_3\begin{bmatrix}\frac{g_2}{2}\end{bmatrix}(w_2+\eta_2,10\tau)\,\vartheta_3\begin{bmatrix}\frac{g_3}{2}\end{bmatrix}(w_3+\eta_3,20\tau),$$

wobei die Grössen w, η, g vermöge des Schemas bestimmt sind:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1. \end{matrix}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g ergeben sich die weiteren:

$$\mathfrak{g}_3 \equiv \mathfrak{g}_2 \equiv 0 \bmod 5, \quad g_1 \equiv \frac{g_3}{5} \bmod 8, \quad \frac{g_2}{5} \equiv \frac{g_3}{5} \bmod 4.$$

Wir setzen an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2$$

resp.:

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_2 - \frac{1}{2},$$

ferner an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3$$

resp.:

$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_2 + \frac{5\tau}{2}, \quad v_3 + 5\tau,$$

so ergiebt sich nach ähnlichen Reductionen wie vorhin die Formel:

$$2(f_1 - f_2) = \sum{}' \vartheta_3[\mathfrak{g}_1](w_1+\eta_1,4\tau)\,\vartheta_3[\mathfrak{g}_2](w_2+\eta_2,10\tau)\,\vartheta_3[\mathfrak{g}_3](w_3+\eta_3,20\tau),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1 = \vartheta_3(v_3,10\tau)\,[\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,5\tau) + \vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_2,5\tau)],$$

$$f_2 = \vartheta_2(v_3,10\tau)\,[\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_2,5\tau) - \vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_2,5\tau)],$$

der Strich an der Summe bedeutet, dass:

$$\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3$$

ungerade ist und endlich die Grössen $\mathfrak{g}$ die Werthe annehmen können:

$$\begin{matrix} \mathfrak{g}_1 = 0, & \mathfrak{g}_2 = 0, & \mathfrak{g}_3 = 0, \\ \mathfrak{g}_1 = 1, & \mathfrak{g}_2 = 5, & \mathfrak{g}_3 = 5, \\ \mathfrak{g}_1 = 2, & \mathfrak{g}_2 = 0, & \mathfrak{g}_3 = 10, \\ \mathfrak{g}_1 = 3, & \mathfrak{g}_2 = 5, & \mathfrak{g}_3 = 15. \end{matrix}$$

Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Modularbeziehung:

$$6)\quad \vartheta_3(0,\tau)\,\vartheta_3(0,5\tau)\,\vartheta_3(0,10\tau)+\vartheta_0(0,\tau)\,\vartheta_0(0,5\tau)\,\vartheta_0(0,10\tau)$$
$$-\vartheta_2(0,\tau)\,\vartheta_2(0,5\tau)\,\vartheta_2(0,10\tau)=2\,\vartheta_0(0,4\tau)\,\vartheta_0(0,10\tau)\,\vartheta_0(0,20\tau).$$

Unter den Additionstheoremen, die zwischen Producten von je vier Factoren bestehen, greifen wir das folgende heraus:

$$7)\quad 16\,.\,\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau)\,\vartheta_3(v_3,5\tau)\,\vartheta_3(v_4,10\tau)=\sum P_\varepsilon,$$
$$P_\varepsilon=\prod\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon,\,m_\varepsilon\tau)$$
$$m_1=2,\quad m_2=4,\quad m_3=10,\quad m_4=20,$$

wobei die Grössen w, η, g vermöge des Schemas bestimmt sind:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -1\\ 5 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 2 & 1. \end{matrix}$$

Um einfachere und übersichtlichere Relationen zu erhalten, wenden wir das alte Verfahren an.

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_2\equiv 0 \bmod 2,\quad g_3\equiv 0 \bmod 5,\quad g_4\equiv 0 \bmod 10,$$
$$\frac{g_3}{5}\equiv -g_1+g_2 \bmod 4,\quad \frac{g_4}{10}\equiv g_1-\frac{g_2}{2} \bmod 4.$$

Wir setzen an Stelle von:

$$v_1\quad,\quad v_2\quad,\quad v_3$$

resp.:

$$v_1+\frac{1}{2},\quad v_2+1,\quad v_3+\frac{5}{2},$$

so ändert sich w_1 um 2. Mithin erhalten wir:

$$16\,.\,\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau)\,\vartheta_0(v_3,5\tau)\,\vartheta_3(v_4,10\tau)=\sum(-1)^{g_1}P_\varepsilon$$

oder also:

$$8\,.\,f_1=\sum\prod\vartheta_3\left[\frac{g'_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon,\,m_\varepsilon\tau),$$

$$f_1=\vartheta_3(v_2,2\tau)\,\vartheta_3(v_4,10\tau)\,[\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_3,5\tau)+\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_3,5\tau)],$$

wobei die Grössen g'_ε sich dadurch von den Grössen g unterscheiden, dass $g'_1\equiv 0 \bmod 2$ ist.

Jetzt setzen wir an Stelle von:

$$v_1\quad,\quad v_2\quad,\quad v_4$$

resp.:

$$v_1+\frac{1}{2},\quad v_2-\frac{1}{2},\quad v_4-\frac{5}{2},$$

so ändert sich w_2 um 2, so dass wir erhalten:

$$8 \cdot f_2 = \sum (-1)^{\frac{g'_2}{2}} \prod \vartheta_3\left[\frac{g'_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$f_2 = \vartheta_0(v_2, 2\tau)\,\vartheta_0(v_4, 10\tau)\,[\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_3, 5\tau) + \vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_3, 5\tau)].$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$4(f_1 + f_2) = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Hierbei nehmen die Grössen $\mathfrak{g}$ die Werthe an:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{g}_1 = 0, & \mathfrak{g}_2 = 0, & \mathfrak{g}_3 = 0, & \mathfrak{g}_4 = 0, \\ \mathfrak{g}_1 = 0, & \mathfrak{g}_2 = 2, & \mathfrak{g}_3 = 0, & \mathfrak{g}_4 = 10, \\ \mathfrak{g}_1 = 1, & \mathfrak{g}_2 = 0, & \mathfrak{g}_3 = 5, & \mathfrak{g}_4 = 10, \\ \mathfrak{g}_1 = 1, & \mathfrak{g}_2 = 2, & \mathfrak{g}_3 = 5, & \mathfrak{g}_4 = 0. \end{array}$$

Wir setzen an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_3 \quad , \quad v_4$$

resp.:

$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_3 + \frac{3.5\tau}{2}, \quad v_4 - \frac{3.10\tau}{2},$$

so tritt an Stelle von:

$$w_1 \quad , \quad w_2 \quad , \quad w_3$$

resp.:

$$w_1 + 4\tau, \quad w_2 + 8\tau, \quad w_3 - 10\tau.$$

Mithin wird:

$$4(f_3 + f_4) = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_4} \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$f_3 = \vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_2(v_4, 10\tau)\,[\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_3, 5\tau) + \vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_3, 5\tau)],$$

$$f_4 = \vartheta_0(v_2, 2\tau)\,\vartheta_1(v_4, 10\tau)\,[\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_3, 5\tau) - \vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_3, 5\tau)].$$

Ferner setzen wir an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3$$

resp.:

$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_2 + \tau, \quad v_3 + \frac{5\tau}{2},$$

so tritt an Stelle von $w_1 : w_1 + 2\tau$ und wir erhalten:

$$4(f_5 + f_6) = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3} \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$f_5 = \vartheta_2(v_2, 2\tau)\,\vartheta_3(v_4, 10\tau)\,[\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_3, 5\tau) - \vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_3, 5\tau)],$$

$$f_6 = -\vartheta_1(v_2, 2\tau)\,\vartheta_0(v_4, 10\tau)\,[\vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_3, 5\tau) + \vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_3, 5\tau)].$$

Durch Subtraction erhalten wir:

$$4(f_3 + f_4 - f_5 - f_6) = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_3}[(-1)^{\eta'_4} - (-1)^{\eta'_2}]\,\mathfrak{P}_\varepsilon,$$

$$\mathfrak{P}_\varepsilon = \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Das ist die Endformel, die wir erhalten wollten. Durch Specialisirung ergeben sich einfache Modulargleichungen.

Setzen wir die Argumente gleich Null, so folgt die Relation:

8) $$A = B,$$

$$A = 2\vartheta_0(0,4\tau)\vartheta_0(0,20\tau)[\vartheta_0(0,2\tau)\vartheta_3(0,10\tau) - \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_0(0,10\tau)],$$

$$B = \vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0,5\tau)[\vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_2(0,10\tau) - \vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_3(0,10\tau)].$$

Aus dieser Relation ergiebt sich unmittelbar die bekannte Modulargleichung:

9) $$\sqrt[4]{\varkappa\lambda}(\sqrt{\varkappa}-\sqrt{\lambda}) = \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}(\sqrt{\lambda'}-\sqrt{\varkappa'}).$$

Unter den Additionstheoremen zwischen Producten von sechs Factoren, die in unserem Falle eine besonders wichtige Rolle spielen, greifen wir die folgenden heraus. Erstens nehmen wir das Theorem:

10) $$\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6}\vartheta_3(v_\varepsilon,\tau) = \sum P_\varepsilon,$$

$$P_\varepsilon = \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6}\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, 5\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{rrrrrr}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1\\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1\\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0.
\end{array}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_4 \equiv -2g_1 - g_2 + 2g_3 \mod 5,$$
$$g_5 \equiv -g_1 - 2g_2 - 2g_3 \mod 5,$$
$$g_6 \equiv -2g_1 + 2g_2 - g_3 \mod 5.$$

Die Grössen g_1, g_2, g_3 bleiben willkürlich. Durch Specialisirung ergeben sich interessante Multiplicatorbeziehungen. Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir bei bekannter Bezeichnungsweise die Relation:

11) $$\vartheta_3^6 = x_0^6 + 12x_0(x_1^5 + x_2^5) + 60x_0^2.x_1^2.x_2^2 + 40x_1^3.x_2^3.$$

Als zweites Additionstheorem nehmen wir das folgende:

12) $$4^3\prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6}\vartheta_3(v_\varepsilon,\mu_\varepsilon\tau) = \sum P_\varepsilon,$$

$$P_\varepsilon = \prod_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=6}\vartheta_3\begin{bmatrix} g \\ 2\end{bmatrix}(w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6 = 5,$$
$$m_1 = m_2 = 2, \quad m_3 = m_4 = 4, \quad m_5 = m_6 = 20,$$

wobei die Grössen w, η, g durch das Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{rrrrrr} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 5 & 0 & 1. \end{array}$$

Es gelten hier nun die alten Betrachtungen wie früher. Wir erhalten eine Modulargleichung durch Nullsetzen der Argumente, die aber wenig übersichtlich ist. Durch wiederholte Anwendung der Substitution halber Perioden kommen wir zu besonders einfachen Resultaten.

In der That, zunächst ergeben sich aus den Congruenzen der Grössen g die weiteren folgenden:

$$2g_1 + 3g_3 + g_5 \equiv 0 \, mod \, 8, \quad 2g_2 + 3g_4 + g_6 \equiv 0 \, mod \, 8, \quad g_5 \equiv g_6 \equiv 0 \, mod \, 5,$$

$$g_3 \equiv -\frac{g_5}{5} \, mod \, 4, \quad g_4 \equiv -\frac{g_6}{5} \, mod \, 4, \quad g_3 + g_4 \equiv \frac{3(g_5+g_6)}{5} \, mod \, 8.$$

Wir setzen jetzt an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_6$$

resp.:

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_6 - \frac{1}{2},$$

so gehen w_4 und w_6 über in $w_4 + 1$ und $w_6 + 1$. Mithin ergiebt sich:

$$4^3. \vartheta_0(v_1)\,\vartheta_3(v_2)\,\vartheta_3(v_3)\,\vartheta_3(v_4)\,\vartheta_3(v_5, 5\tau)\,\vartheta_0(v_6, 5\tau) = \sum (-1)^{\frac{1}{4}\left(g_1 + \frac{g_6}{5}\right)} P_\iota.$$

Durch Addition erhalten wir:

$$32 . f_1 = \sum \prod \vartheta_3 \left[\frac{g'}{2}\right] (w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1 = \vartheta_3(v_2)\,\vartheta_3(v_3)\,\vartheta_3(v_4)\,\vartheta_3(v_5, 5\tau)\,[\vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_6, 5\tau) + \vartheta_0(v_1)\,\vartheta_0(v_6, 5\tau)],$$

wobei ferner die Grössen g'_ε denselben Congruenzen Genüge leisten, wie die Grössen g_ε, daneben aber noch der Congruenz:

$$g'_4 + \frac{g'_6}{5} \equiv 0 \, mod \, 8.$$

Wir setzen zweitens an Stelle von:

$$v_2 \quad , \quad v_5$$

resp.:

$$v_2 + \frac{1}{2}, \quad v_5 - \frac{1}{2},$$

so gehen w_3 und w_5 über in $w_3 + 1$, $w_5 + 1$ und wir erhalten:

$$16(f_1 + f_2) = \sum \prod \vartheta_3 \left[\frac{g''_\varepsilon}{2}\right] (w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_2 = \vartheta_0(v_2)\,\vartheta_3(v_3)\,\vartheta_3(v_4)\,\vartheta_0(v_5, 5\tau)\,[\vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_6, 5\tau) + \vartheta_0(v_1)\,\vartheta_0(v_6, 5\tau)],$$

wobei ferner die Grössen g''_ε den Congruenzen Genüge leisten:

$$g''_1 \equiv -\frac{g''_5}{5}\,mod\,4,\quad g''_2 \equiv -\frac{g''_6}{5}\,mod\,4,\quad g''_5 \equiv g''_6 \equiv 0\,mod\,5,$$

$$g''_3 \equiv -\frac{g'_5}{5}\,mod\,8,\quad g''_4 \equiv -\frac{g''_6}{5}\,mod\,8,$$

$$\frac{g''_5 + g''_6}{5} \equiv 0\,mod\,2.$$

Wir setzen jetzt an Stelle von:

resp.: $v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5$

$$v_2 + \frac{1}{2},\quad v_3 + \frac{1}{2},\quad v_4 + \frac{1}{2},\quad v_5 + \frac{1}{2},$$

so geht w_1, w_3, w_5 über in resp.:

$$w_1 + 1,\quad w_3 + 1,\quad w_5 - 1$$

und wir erhalten:

$$16(f_3 + f_4) = \sum (-1)^{\frac{g''_1}{2} + \frac{g''_3}{4} - \frac{g''_5}{20}} \prod \vartheta_3\left[\frac{g''_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_3 = \vartheta_0(v_2)\,\vartheta_0(v_3)\,\vartheta_0(v_4)\,\vartheta_0(v_5, 5\tau)\,[\vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_6, 5\tau) + \vartheta_0(v_1)\,\vartheta_0(v_6, 5\tau)],$$

$$f_4 = \vartheta_3(v_2)\,\vartheta_0(v_3)\,\vartheta_0(v_4)\,\vartheta_3(v_5, 5\tau)\,[\vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_6, 5\tau) + \vartheta_0(v_1)\,\vartheta_0(v_6, 5\tau)].$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$8F_1 = 8(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),$$

$$\mathfrak{g}_1 \equiv -\frac{\mathfrak{g}_5}{5}\,mod\,2,\quad \mathfrak{g}_2 \equiv -\frac{\mathfrak{g}_6}{5}\,mod\,2,\quad \mathfrak{g}_5 \equiv \mathfrak{g}_6 \equiv 0\,mod\,5,$$

$$\mathfrak{g}_3 \equiv -\frac{\mathfrak{g}_6}{5}\,mod\,4,\quad \mathfrak{g}_4 \equiv -\frac{\mathfrak{g}_6}{5}\,mod\,4.$$

Wir setzen nunmehr an Stelle von:

resp.: $v_1,\ v_3,\ v_4,\ v_6$

$$v_1 + \frac{\tau}{2},\quad v_3 + \frac{\tau}{2},\quad v_4 - \frac{\tau}{2},\quad v_6 + \frac{5\tau}{2},$$

so geht w_2 in $w_2 + 2\tau$ über. Nehmen wir an, dass F_1 von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen in F_2 übergeht, so folgt:

$$8F_2 = \sum (-1)^{\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_6} \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),$$

oder also:

$$4(F_1 - F_2) = \sum' \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),$$

wobei in der Summe jetzt:

$$\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_6$$

eine ungerade Zahl ist.

Setzen wir endlich an Stelle von:

$$v_2 \;,\; v_3 \;,\; v_4 \;,\; v_5$$

resp.:

$$v_2 + \frac{\tau}{2}, \quad v_3 + \frac{\tau}{2}, \quad v_4 + \frac{\tau}{2}, \quad v_5 + \frac{5\tau}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 2\tau$ über.

Nehmen wir an, dass F_1 und F_2 hierbei von dem Exponentialfactor abgesehen in F_3 und F_4 übergehen, so wird:

$$4(F_3 - F_4) = \sum{}' (-1)^{\eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_5} \prod \vartheta_3 |g_\varepsilon| (w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Mithin erhalten wir das Additionstheorem:

$$2(F_1 - F_2 - F_3 + F_4) = \sum{}'' \prod \vartheta_3 [g_\varepsilon] (w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei nunmehr auf der rechten Seite die beiden Grössen:

$$\eta'_1 + \eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_6$$

und

$$\eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_5$$

ungerade sind. Das ist die Endformel, zu welcher wir gelangen wollten. Setzen wir in ihr die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Modulargleichung:

$$13) \qquad A = B,$$

$$A = \vartheta_3^4 . \theta_3^2 + \vartheta_0^4 . \theta_0^2 + \vartheta_3^2 . \vartheta_0^2 (\theta_0^2 + \theta_3^2) + 2\vartheta_0 . \vartheta_3 . \theta_0 . \theta_3 (\vartheta_0^2 + \vartheta_3^2)$$
$$- 2\vartheta_2^3 . \theta_2 (\vartheta_0 . \theta_0 + \vartheta_3 . \theta_3) + \vartheta_2^2 . \theta_2^2 (\vartheta_3^2 - \vartheta_0^2),$$

$$B = 8\vartheta_0^2(0, 2\tau)\, \vartheta_0^2(0, 4\tau)\, \vartheta_0^2(0, 20\tau),$$

$$\theta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 5\tau).$$

Mit dem soeben behandelten ist aufs Engste das Additionstheorem verwandt:

$$14) \qquad 2^6 \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum P_\varepsilon,$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5, \quad \mu_5 = \mu_6 = 1,$$

$$m_1 = m_2 = 10, \quad m_3 = m_4 = 20, \quad m_5 = m_6 = 4,$$

wobei die Grössen w, η, g durch das Schema bestimmt sind

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die einfacheren:

$$g_3 + g_5 \equiv 0 \; mod\, 4, \quad g_4 + g_6 \equiv 0 \; mod\, 4, \quad g_3 + g_4 \equiv 3(g_5 + g_6) \; mod\, 8,$$
$$2g_1 + 3g_3 - 3g_5 \equiv 0 \; mod\, 8, \quad 2g_2 + 3g_4 - 3g_6 \equiv 0 \; mod\, 8,$$
$$g_1 \equiv g_2 \equiv g_3 \equiv g_4 \equiv 0 \; mod\, 5.$$

Wir setzen nun der Reihe nach an Stelle von:

$$\begin{array}{lllllll}
 & v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & v_5, & v_6, \\
\text{I.} & v_1 + \frac{5}{2}, & v_2, & v_3, & v_4, & v_5, & v_6 - \frac{1}{2}, \\
\text{II.} & v_1, & v_2 + \frac{5}{2}, & v_3, & v_4, & v_5 - \frac{1}{2}, & v_6, \\
\text{III.} & v_1, & v_2 + \frac{1}{2}, & v_3 + \frac{1}{2}, & v_4 + \frac{1}{2}, & v_5 + \frac{1}{2}, & v_6, \\
\text{IV.} & v_1 + \frac{5\tau}{2}, & v_2, & v_3 - \frac{5\tau}{2}, & v_4 + \frac{5\tau}{2}, & v_5, & v_6 + \frac{\tau}{2}, \\
\text{V.} & v_1, & v_2 + \frac{5\tau}{2}, & v_3 - \frac{5\tau}{2}, & v_4 - \frac{5\tau}{2}, & v_5 + \frac{\tau}{2}, & v_6,
\end{array}$$

und stellen ganz ähnliche Untersuchungen wie beim letzten Additionstheorem an, dann ergiebt sich durch Nullsetzen der Argumente die folgende Modulargleichung:

$$15) \qquad A_1 = B_1,$$
$$A_1 = \vartheta_3^2 . \theta_3^4 + \vartheta_0^2 . \theta_0^4 + (\vartheta_0^2 + \vartheta_3^2)\,\theta_0^2 . \theta_3^2 + 2\vartheta_0 . \vartheta_3 . \theta_0 . \theta_3(\theta_0^2 + \theta_3^2)$$
$$- 2\vartheta_2 . \theta_2^2(\vartheta_0 . \theta_0 + \vartheta_3 . \theta_3) + \vartheta_2^2 . \theta_2^2(\theta_3^2 - \theta_0^2),$$
$$B_1 = 8\vartheta_0^2(0, 10\tau)\,\vartheta_0^2(0, 20\tau)\,\vartheta_0^2(0, 4\tau).$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass wir diese Modulargleichung auch unmittelbar aus der vorhin aufgestellten hätten ableiten können.

Zu neuen Modulargleichungen führt das Additionstheorem:

$$16) \qquad \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau), \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots 6,$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 5,$$
$$m_1 = m_2 = 2, \quad m_3 = 4, \quad m_4 = m_5 = 10, \quad m_6 = 20,$$

bei welchem die Grössen w, η, g aus dem Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{rrrrrr}
2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -5 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\
5 & 5 & 0 & -2 & -1 & -1.
\end{array}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgt:

$$g_4 \equiv g_2 - g_3 \mod 4, \quad g_6 \equiv 2g_2 - g_3 \mod 4, \quad g_3 \equiv \frac{g_1}{2} + \frac{g_5}{10} \mod 2,$$

$$g_1 \equiv 0 \mod 2, \quad g_4 \equiv g_6 \equiv 0 \mod 5, \quad g_5 \equiv 0 \mod 10.$$

Wir setzen nun der Reihe nach an Stelle von:

$$\begin{array}{lllllllll}
v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & v_5, & v_6, & w_1, & w_4, & w_5 \\
v_1+\frac{1}{2}, & v_2-\frac{1}{2}, & v_3, & v_4, & v_5, & v_6, & w_1+1, & w_4, & w_5, \\
v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & v_5+\frac{1}{2}, & v_6-\frac{1}{2}, & w_1, & w_4, & w_5+1, \\
v_1, & v_2, & v_3+\frac{1}{2}, & v_4-\frac{1}{2}, & v_5+\frac{1}{2}, & v_6+\frac{1}{2}, & w_1, & w_4-2, & w_5,
\end{array}$$

so ergiebt sich vermöge ähnlicher Betrachtungen wie früher:

$$F_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$\mathfrak{g}_1 \equiv 0 \mod 2, \quad \mathfrak{g}_4 \equiv \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_3 \mod 2, \quad \mathfrak{g}_6 \equiv 2\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_3 \mod 2, \quad \mathfrak{g}_5 \equiv 0 \mod 2,$$

$$\mathfrak{g}_4 \equiv \mathfrak{g}_5 \equiv \mathfrak{g}_6 \equiv 0 \mod 5,$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \vartheta_3(v_3)\,\vartheta_3(v_4, 5\tau)\,\vartheta_3(v_5, 5\tau)\,\vartheta_3(v_6, 5\tau)\,D, \\
f_2 &= \vartheta_3(v_3)\,\vartheta_3(v_4, 5\tau)\,\vartheta_0(v_5, 5\tau)\,\vartheta_0(v_6, 5\tau)\,D, \\
f_3 &= \vartheta_0(v_3)\,\vartheta_0(v_4, 5\tau)\,\vartheta_0(v_5, 5\tau)\,\vartheta_0(v_6, 5\tau)\,D, \\
f_4 &= \vartheta_0(v_3)\,\vartheta_0(v_4, 5\tau)\,\vartheta_3(v_5, 5\tau)\,\vartheta_3(v_6, 5\tau)\,D, \\
D &= \vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_2) + \vartheta_0(v_1)\,\vartheta_0(v_2).
\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir an Stelle von:

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad v_4, \quad v_5, \quad v_6, \quad w_2, \quad w_4$$

resp.:

$$\begin{array}{llllllll}
v_1+\frac{\tau}{2}, & v_2+\frac{\tau}{2}, & v_3+\frac{\tau}{2}, & v_4+\frac{5\tau}{2}, & v_5, & v_6, & w_2+2\tau, & w_4, \\
v_1, & v_2, & v_3+\frac{5\tau}{2}, & v_4-\frac{5\tau}{2}, & v_5+\frac{5\tau}{2}, & v_6+\frac{5\tau}{2}, & w_2, & w_4-10\tau.
\end{array}$$

Nehmen wir an, dass bei der ersten Substitution von einem Exponentialfactor abgesehen F_1 in F_2, bei der zweiten F_1 und F_2 in F_3 und F_4 übergehen, so ergiebt sich die elegante Formel:

$$F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = \sum{}' \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass:

$$\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4$$

und

$$\eta'_3 + \eta'_4 + \eta'_5 + \eta'_6$$

ungerade Zahlen sind.

Setzen wir die Argumente gleich Null, so ergiebt sich die Modulargleichung:

$$17)\qquad A - B = C,$$

$$A = (\theta_3^2 + \theta_0^2)(\vartheta_3^3.\theta_3 + \vartheta_0^3.\theta_0 + \vartheta_0^2.\vartheta_3.\theta_3 + \vartheta_3^2.\vartheta_0.\theta_0),$$

$$B = \vartheta_2^3.\theta_2(\theta_3^2 + \theta_0^2) + \vartheta_2.\theta_2^3(\vartheta_3^2 + \vartheta_0^2) + \vartheta_2^2.\theta_2^2(\vartheta_3.\theta_3 + \vartheta_0.\theta_0),$$

$$C = 8.\vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(0,10\tau)\vartheta_0(0,2\tau)\vartheta_0(0,10\tau)\vartheta_0(0,4\tau)\vartheta_0(0,20\tau).$$

Die Additionstheoreme zwischen Producten von mehr als sechs Factoren sollen kürzer behandelt werden.

Für den Fall von acht Factoren greifen wir zunächst das Theorem heraus:

$$18)\qquad 2^8.\prod\vartheta_3(v_\varepsilon,\mu_\varepsilon\tau) = \sum\prod\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),\quad \varepsilon = 1,2,\ldots 8,$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,\quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 5,$$

$$m_1 = m_2 = 2,\quad m_3 = m_4 = 4,\quad m_5 = m_6 = 10,\quad m_7 = m_8 = 20,$$

bei welchem die Grössen w, η, g aus dem Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1\\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\\
0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & -5 & -5 & 2 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 2 & -1 & 1.
\end{array}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_5 \equiv 3g_2 + 3g_4 \bmod 4,\quad g_6 \equiv 3g_1 + 3g_3 \bmod 4,$$

$$g_7 \equiv 2g_1 - g_3 \bmod 8,\quad g_8 \equiv 2g_2 - g_4 \bmod 8,$$

$$g_3 \equiv g_4 \bmod 2.$$

Wir vermehren nun:

erstens: v_1 um $\frac{1}{2}$, v_6 um $-\frac{1}{2}$, v_7 um $-\frac{1}{2}$, v_8 um $\frac{1}{2}$,

zweitens: v_2 um $\frac{1}{2}$, v_5 um $-\frac{1}{2}$, v_7 um $\frac{1}{2}$, v_8 um $\frac{1}{2}$,

drittens: v_2 um -1, v_3 um $\frac{1}{2}$, v_4 um $\frac{1}{2}$, v_7 um $\frac{1}{2}$, v_8 um $\frac{1}{2}$,

und stellen ähnliche Betrachtungen wie früher an, so erhalten wir:

$$2^5(f_1+f_2+f_3+f_4)=\sum\prod\vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),$$
$$\mathfrak{g}_5\equiv\mathfrak{g}_2+\mathfrak{g}_1 \, mod\, 2,\quad \mathfrak{g}_7\equiv 2\mathfrak{g}_1-\mathfrak{g}_3 \, mod\, 4,$$
$$\mathfrak{g}_6\equiv\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_3 \, mod\, 2,\quad \mathfrak{g}_8\equiv 2\mathfrak{g}_2-\mathfrak{g}_4 \, mod\, 4,$$

wobei gesetzt ist:

$$f_1=\vartheta_3(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\vartheta_3(v_5,5\tau)D,\quad f_3=\vartheta_3(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4)\vartheta_3(v_5,5\tau)D_1,$$
$$f_2=\vartheta_0(v_2)\vartheta_3(v_3)\vartheta_3(v_4)\vartheta_0(v_5,5\tau)D_1,\quad f_4=\vartheta_0(v_2)\vartheta_0(v_3)\vartheta_0(v_4)\vartheta_0(v_5,5\tau)D,$$
$$D=\vartheta_3(v_1)\vartheta_3(v_6,5\tau)\vartheta_3(v_7,5\tau)\vartheta_3(v_8,5\tau)+\vartheta_0(v_1)\vartheta_0(v_6,5\tau)\vartheta_0(v_7,5\tau)\vartheta_0(v_8,5\tau),$$
$$D_1=\vartheta_3(v_1)\vartheta_3(v_6,5\tau)\vartheta_0(v_7,5\tau)\vartheta_0(v_8,5\tau)+\vartheta_0(v_1)\vartheta_0(v_6,5\tau)\vartheta_3(v_7,5\tau)\vartheta_3(v_8,5\tau).$$

Um eine Relation zwischen den gewöhnlichen Thetafunctionen zu erhalten, müssen weitere Substitutionen halber Perioden angewandt werden. Wir begnügen uns damit, diese Substitutionen wirklich anzugeben, ohne im Uebrigen die Schlussformel hinzuschreiben. Wir haben zu vermehren:

erstens: v_2 um $\frac{\tau}{2}$, v_3 um $\frac{\tau}{2}$, v_4 um $\frac{\tau}{2}$, v_5 um $\frac{5\tau}{2}$,

zweitens: v_1 um $\frac{\tau}{2}$, v_3 um $\frac{\tau}{2}$, v_4 um $-\frac{\tau}{2}$, v_6 um $\frac{5\tau}{2}$,

drittens: v_1 um $\frac{5\tau}{2}$, v_6 um $-\frac{5\tau}{2}$, v_7 um $-\frac{5\tau}{2}$, v_8 um $\frac{5\tau}{2}$,

viertens: v_2 um $\frac{5\tau}{2}$, v_5 um $-\frac{5\tau}{2}$, v_7 um $\frac{5\tau}{2}$, v_8 um $\frac{5\tau}{2}$.

Bei diesen Substitutionen geht resp. über: w_1 in $w_1+2\tau$; w_2 in $w_2+2\tau$; w_5 in $w_5+10\tau$; w_6 in $w_6+10\tau$, während die anderen Grössen ungeändert bleiben.

Ein weiteres Additionstheorem zwischen Producten von acht Factoren lautet:

$$19)\qquad 2^8.\prod\vartheta_3(v_\varepsilon,\mu_\varepsilon\tau)=\sum\prod\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon, m_\varepsilon\tau),$$
$$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=1,\quad \mu_5=\mu_6=\mu_7=\mu_8=5,$$
$$m_1=m_2=m_3=m_4=2,\quad m_5=m_6=m_7=m_8=10,$$

wobei die Grössen w, η, g aus dem Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\\
0 & 5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1.
\end{array}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$\begin{aligned} -g_5 &\equiv g_1 + g_2 + g_3 \mod 4, \\ -g_6 &\equiv g_1 - g_2 + g_4 \mod 4, \\ -g_7 &\equiv -g_1 + g_3 + g_4 \mod 4, \\ -g_8 &\equiv g_2 - g_3 + g_4 \mod 4. \end{aligned}$$

Das Additionstheorem zeichnet sich durch eine grosse Symmetrie aus. Die Substitution halber Perioden führt zu ähnlich einfachen Beziehungen, wie die bisher aufgestellten. Wir haben im Ganzen acht Substitutionen anzuwenden. Bei den vier ersten hat man zu vermehren:

$$\begin{array}{llll} v_1 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_2 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_3 \text{ um } -\frac{1}{2}, & v_5 \text{ um } -\frac{5}{2}, \\ v_1 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_2 \text{ um } -\frac{1}{2}, & v_4 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_6 \text{ um } -\frac{5}{2}, \\ v_1 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_3 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_4 \text{ um } -\frac{1}{2}, & v_7 \text{ um } \frac{5}{2}, \\ v_2 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_3 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_4 \text{ um } \frac{1}{2}, & v_8 \text{ um } -\frac{5}{2}. \end{array}$$

Hierbei geht resp. über: w_1 in $w_1 + 2$; w_2 in $w_2 + 2$; w_3 in $w_3 + 2$; w_4 in $w_4 + 2$.

Ganz analog lauten die Substitutionen um halbe Vielfache von τ.

Unter den Additionstheoremen, die zwischen Producten von je zwölf Factoren bestehen und die in grösserer Anzahl gebildet werden können, greifen wir die folgenden heraus. Erstens besteht das Theorem:

$$20)\quad 2^{12}.\prod \vartheta_2(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau), \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots 12,$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 1, \quad \mu_7 = \mu_8 = \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{11} = \mu_{12} = 5,$$
$$m_1 = m_2 = 1, \quad m_3 = m_4 = 2, \quad m_5 = m_6 = 4, \quad m_7 = m_8 = 5, \quad m_9 = m_{10} = 10,$$
$$m_{11} = m_{12} = 20,$$

wobei die Grössen w, η, g aus dem Schema bestimmt sind:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_3 \equiv g_6 + g_9 \; mod\, 4, \quad g_{11} \equiv -3g_5 - 2g_{10} \; mod\, 8,$$
$$g_4 \equiv -g_5 - g_{10} \; mod\, 4, \quad g_{12} \equiv -3g_6 - 2g_9 \; mod\, 8,$$
$$g_1 + g_2 \equiv 0 \; mod\, 2, \quad g_7 + g_8 \equiv 0 \; mod\, 2, \quad g_1 + g_3 + g_4 + g_7 \equiv g_9 + g_{10} \; mod\, 2,$$
$$g_7 \equiv g_8 \equiv g_9 \equiv g_{10} \equiv g_{11} \equiv g_{12} \equiv 0 \; mod\, 5.$$

Auch hier führt die Substitution halber Perioden zu eleganten Thetarelationen. Wir deuten die Operationen nur an, ohne sie wirklich durchzuführen.

Wir vermehren:

erstens: v_1 um $\frac{1}{2}$, v_2 um $-\frac{1}{2}$, v_4 um $\frac{1}{2}$, v_5 um $-\frac{1}{2}$,

zweitens: v_7 um $\frac{1}{2}$, v_8 um $-\frac{1}{2}$, v_{10} um $\frac{1}{2}$, v_{11} um $-\frac{1}{2}$,

drittens: v_3 um $\frac{1}{2}$, v_7 um $-\frac{1}{2}$, v_8 um $-\frac{1}{2}$, v_9 um $\frac{1}{2}$,

viertens: v_6 um $\frac{1}{2}$, v_{10} um $\frac{1}{2}$, v_{11} um $\frac{1}{2}$, v_{12} um $\frac{1}{2}$,

fünftens: v_4 um $\frac{1}{2}$, v_5 um $\frac{1}{2}$, v_6 um -1, v_{10} um $\frac{1}{2}$, v_{11} um $\frac{1}{2}$.

Aehnlich lauten die Substitutionen um halbe Vielfache von τ.

Von grosser Symmetrie endlich ist das Additionstheorem, welches zu dem folgenden Schema gehört:

$$\begin{matrix}
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -5 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0,
\end{matrix}$$

wobei die Zahlen μ und m die folgenden Werthe annehmen:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 1, \quad \mu_7 = \mu_8 = \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{11} = \mu_{12} = 5,$$
$$m_1 = m_2 = 1, \quad m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 4, \quad m_7 = m_8 = 5, \quad m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = 20.$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$5g_3 \equiv -g_{10} - g_{11} + g_{12} \bmod 8,$$
$$5g_4 \equiv g_9 - g_{11} - g_{12} \bmod 8,$$
$$g_5 \equiv -g_9 + g_{10} - 5g_{11} \bmod 8,$$
$$g_6 \equiv g_9 + g_{10} + 5g_{12} \bmod 8,$$
$$g_1 + g_2 \equiv g_7 + g_8 \equiv g_9 + g_{10} \equiv 0 \bmod 2.$$

Hier bleiben wir stehen.

Die bisherigen Betrachtungen genügen zur gleichen Zeit, um die Multiplicatorgleichung, die zur Transformation fünften Grades gehört, bis auf einen Coefficienten zu bestimmen.

In der That, wir setzen:

$$21)\qquad M_\xi = \vartheta_3^2\left(0, \frac{\tau + 16\xi}{5}\right) : \vartheta_2^2(0,\tau), \qquad \xi = 0, 1, \ldots 4,$$

$$22)\qquad M_6 = 5 \,.\, \vartheta_3^2(0, 5\tau) : \vartheta_3^2(0,\tau),$$

dann gelten die Beziehungen:

$$23)\qquad \vartheta_3\left(0, \frac{\tau + 16\xi}{5}\right) = x_0 + 2\alpha^\xi x_1 + 2\alpha^{4\xi} x_2,$$
$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

und es wird:

$$24)\begin{cases} \vartheta_3^2(0,\tau)\, S_1 = 10(x_0^2 + 4x_1 \,.\, x_2), \\ \vartheta_3^4(0,\tau)\, S_2 = 30(x_0^2 + 4x_1 \,.\, x_2)^2 = \frac{3}{10}\, \vartheta_3^4(0,\tau)\, S_1^2, \\ \vartheta_3^6(0,\tau)\, S_3 = 10[13x_0^2 + 96x_0(x_1^5 + x_2^5) + 60 \,.\, x_0^4 \,.\, x_1 \,.\, x_2 + 640 \,.\, x_1^3 \,.\, x_2^3 \\ \qquad\qquad + 16 \,.\, 45 \,.\, x_0^2 \,.\, x_1^2 \,.\, x_2^2], \\ \vartheta_3^8(0,\tau)\, S_4 = 70(x_0^2 + 4x_1 \,.\, x_2)\, F, \\ \qquad F = 9x_0^6 + 2^7 x_0 (x_1^5 + x_2^5) - 20 \,.\, x_0^4 \,.\, x_1 \,.\, x_2 + 2^4 \,.\, 35 \,.\, x_0^2 x_1^2 x_2^2 \\ \qquad\qquad + 5 \,.\, 2^6 \,.\, x_1^3 \,.\, x_2^3. \\ \qquad S_\alpha = \sum M^\alpha. \end{cases}$$

Aus der vorletzten Gleichung folgt:

$$25)\qquad S_4 = \frac{7}{15}\, S_1 \left(2S_3 - \frac{S_1^3}{8}\right).$$

Diese Gleichungen genügen für unsere Zwecke.

Wir hatten nun gezeigt, dass die Gleichung besteht:

$$\vartheta_3^2 = x_0^2 + 4x_1 \,.\, x_2,$$

somit ist der Werth der ersten Potenzsumme bestimmt und damit auch derjenige der zweiten.

Ferner war gefunden worden:

$$\vartheta_3^6 = x_0^6 + 12x_0(x_1^5 + x_2^5) + 60 \,.\, x_0^2 \,.\, x_1^2 \,.\, x_2^2 + 40 \,.\, x_1^3 \,.\, x_2^3$$

und es ist:

$$\frac{\vartheta_3^6 . S_1^3}{200} = 5 . x_0^6 + 60 . x_0^4 . x_1 . x_2 + 320 . x_1^3 . x_2^3 + 240 . x_0^2 . x_1^2 . x_2^2,$$

mithin ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_3^6}{10}\left(S_3 - \frac{S_1^3}{20}\right) = 8 . x_0^6 + 96 . x_0 (x_1^5 + x_2^5) + 320 . x_1^3 \, x_2^3 + 480 . x_0^2 . x_1^2 . x_2^2,$$

oder also:

$$26) \qquad S_3 = \frac{S_1^3}{20} + 80.$$

Es ist demnach die dritte Potenzsumme und mit ihr nach den aufgestellten Formeln auch die vierte berechnet. Das Product aller Wurzeln der Multiplicatorgleichung ist unmittelbar bekannt, sodass wir die sämmtlichen Coefficienten derselben bestimmen können mit Ausnahme von p_5 und zwar ergiebt sich:

$$p_1 = -10, \quad p_2 = 35, \quad p_3 = -60, \quad p_4 = 55, \quad p_6 = 5$$

oder also wir erhalten die Gleichung:

$$27) \qquad x_0^6 - 10 x_0^5 + 35 x_0^4 - 60 x_0^3 + 55 x_0^2 + p_5 x_0 + 5 = 0.$$

Hiermit schliessen wir die Transformation fünften Grades ab.

§ 4.

Die Transformation siebenten Grades.

Es mögen jetzt die aufgestellten Additionstheoreme für die Transformation siebenten Grades verwerthet werden und zwar möge bemerkt werden, dass die hierauf bezüglichen Auseinandersetzungen von Herrn **Röseberg** herrühren.

Wir nehmen zuerst das Additionstheorem:

$$1) \quad 4 . \vartheta_3(v_1, \tau) \, \vartheta_3(v_2, 7\tau) = \sum \vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1 + \eta_1, 2\tau) \, \vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2 + \eta_2, 14\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 7 & -1. \end{matrix}$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_2 \equiv 0 \, mod \, 7, \quad g_1 \equiv \frac{g_2}{7} \, mod \, 4.$$

Vermehren wir v_1 um $\frac{1}{2}$, v_2 um $\frac{7}{2}$, so geht w_1 in $w_1 + 2$ über und wir erhalten:

$$4 . \vartheta_0(v_1, \tau) \, \vartheta_0(v_2, 7\tau) = \sum (-1)^{\eta_1} \vartheta_3\left[\frac{g_1}{2}\right](w_1 + \eta_1, 2\tau) \, \vartheta_3\left[\frac{g_2}{2}\right](w_2 + \eta_2, 14\tau)$$

oder also durch Addition:

$$2[\vartheta_3(v_1,\tau)\vartheta_3(v_2,7\tau)+\vartheta_0(v_1,\tau)\vartheta_0(v_2,7\tau)]=\sum\vartheta_3[\mathfrak{g}_1](w_1+\eta_1,2\tau)\vartheta_3[\mathfrak{g}_2](w_2+\eta_2,14\tau),$$

wobei jetzt die Congruenzen stattfinden:

$$\mathfrak{g}_2\equiv 0 \; mod\; 7,\quad \mathfrak{g}_1\equiv\frac{\mathfrak{g}_2}{7}\; mod\; 2.$$

Wir vermehren jetzt v_1 um $\frac{\tau}{2}$, v_2 um $\frac{7\tau}{2}$, so geht w_1 in $w_1+2\tau$ über und wir erhalten die Gleichung:

$$2[\vartheta_2(v_1,\tau)\vartheta_2(v_2,7\tau)-\vartheta_1(v_1,\tau)\vartheta_1(v_2,7\tau)]=\sum(-1)^{2\eta_1}\vartheta_3[\mathfrak{g}_1](w_1+\eta_1,2\tau)\vartheta_3[\mathfrak{g}_2](w_2+\eta_2,14\tau).$$

Durch Addition und Subtraction ergeben sich dann zwei Gleichungen, die schon von Schröter aufgestellt worden sind und lauten:

$$2)\quad\begin{cases}\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,7\tau)+\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_2,7\tau)+\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_2,7\tau)\\ \qquad -\vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_2,7\tau)=2[\vartheta_3(w_1,2\tau)\,\vartheta_3(w_2,14\tau)\\ \qquad +\vartheta_2(w_1,2\tau)\,\vartheta_2(w_2,14\tau)].\end{cases}$$

$$3)\quad\begin{cases}\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,7\tau)+\vartheta_0(v_1,\tau)\,\vartheta_0(v_2,7\tau)-\vartheta_2(v_1,\tau)\,\vartheta_2(v_2,7\tau)\\ \qquad +\vartheta_1(v_1,\tau)\,\vartheta_1(v_2,7\tau)=2[\vartheta_0(w_1,2\tau)\,\vartheta_0(w_2,14\tau)\\ \qquad -\vartheta_1(w_1,2\tau)\,\vartheta_1(w_2,14\tau)].\end{cases}$$

Unter den Additionstheoremen zwischen Producten von vier Factoren greifen wir das folgende heraus, welches zu dem Schema gehört:

$\mu_1=1,$	$\mu_2=1,$	$\mu_3=7,$	$\mu_4=7$	
1	1	1	1	$m_1=4,$
1	-1	1	-1	$m_2=4,$
7	0	-1	0	$m_3=14,$
0	7	0	-1	$m_4=14,$

und lautet:

$$4)\qquad 2^4.\prod\vartheta_3(v_\varepsilon,\mu_\varepsilon\tau)=\sum\prod\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon,m_\varepsilon\tau).$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_1\equiv g_2\; mod\, 2,\quad g_3\equiv g_4\equiv 0\; mod\, 7,\quad g_1+g_2-\frac{2g_3}{7}\equiv 0\; mod\, 8,\quad g_1-g_2-\frac{2g_4}{7}\equiv 0\; mod\, 8.$$

Setzen wir an Stelle von:

$$v_1\;,\quad v_2\;,\quad v_3\;,\quad v_4$$

resp.:

$$v_1+\frac{1}{2},\quad v_2\;,\quad v_3-\frac{1}{2},\quad v_4\;,$$

$$v_1\;,\quad v_2+\frac{1}{2},\quad v_3\;,\quad v_4-\frac{1}{2},$$

so tritt im ersten Falle an Stelle von w_3: w_3+2, im zweiten Falle an Stelle von w_4: w_4+2 und wir erhalten nach einigen einfachen Operationen die Gleichung:

$$2^2 . F . F_1 = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$F = \vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_3, 7\tau) + \vartheta_0(v_1, \tau)\, \vartheta_0(v_3, 7\tau),$$

$$F_1 = \vartheta_3(v_2, \tau)\, \vartheta_3(v_4, 7\tau) + \vartheta_0(v_2, \tau)\, \vartheta_0(v_4, 7\tau),$$

wobei die Congruenzen bestehen:

$$\mathfrak{g}_1 \equiv \mathfrak{g}_2 \, mod\, 2, \; \mathfrak{g}_3 \equiv \mathfrak{g}_4 \equiv 0 \, mod\, 7, \; \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 - \frac{2\mathfrak{g}_3}{7} \equiv 0 \, mod\, 4, \; \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2 - \frac{2\mathfrak{g}_4}{7} \equiv 0 \, mod\, 4.$$

Schon hier könnten wir stehen bleiben, indessen können die Resultate durch Hinzunahme weiterer Substitutionen halber Perioden noch wesentlich vereinfacht werden. Wir setzen dazu an Stelle von v_1 und v_3 resp. $v_1 + \frac{7\tau}{2}$, $v_3 - \frac{7\tau}{2}$, so geht w_3 in $w_3 + 14\tau$ über und wir erhalten:

$$2^2 . F_2 . F_1 = \sum (-1)^{2\eta_3} \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$F_2 = \vartheta_2(v_1, \tau)\, \vartheta_2(v_3, 7\tau) - \vartheta_1(v_1, \tau)\, \vartheta_1(v_3, 7\tau).$$

Durch Addition ergiebt sich:

$$2(F + F_2) F_1 = \sum{}' \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass η_3 eine ganze Zahl ist.

Jetzt setzen wir an Stelle von v_2 und v_4 resp. $v_2 + \frac{7\tau}{2}$, $v_4 - \frac{7\tau}{2}$, so geht w_4 in $w_4 + 14\tau$ über und wir erhalten:

$$2(F + F_2) F_3 = \sum{}' (-1)^{2\eta_4} \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$F_3 = \vartheta_2(v_2, \tau)\, \vartheta_2(v_4, 7\tau) - \vartheta_1(v_2, \tau)\, \vartheta_1(v_4, 7\tau).$$

Durch Addition erhalten wir die elegante Formel:

$$(F + F_2)(F_1 + F_3) = \sum{}'' \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei der doppelte Strich an der Summe bedeutet, dass sowohl η_3 als auch η_4 eine ganze Zahl sein muss. Setzen wir in dieser Formel $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$, so ergiebt sich unter Zuhülfenahme der quadratischen Transformation die Modulargleichung:

$$5) \quad (\vartheta_3 . \theta_3 + \vartheta_0 . \theta_0 + \vartheta_2 . \theta_2)^2 = 2(\vartheta_3^2 . \theta_3^2 + \vartheta_0^2 . \theta_0^2 + \vartheta_2^2 . \theta_2^2).$$

Dabei ist analog wie früher gesetzt worden:

$$\theta_\alpha = \vartheta_\alpha(0, 7\tau).$$

Wir haben, um zu der letzten Formel zu gelangen, die durch Substitution halber Perioden gewonnenen Gleichungen addirt. Hätten wir sie in geeigneter Weise subtrahirt, so ergiebt sich für die Nullwerthe der Argumente die Modulargleichung:

$$6) \quad (\vartheta_3 . \theta_3 + \vartheta_0 . \theta_0 - \vartheta_2 . \theta_2)^2 = 4 \vartheta_0 \vartheta_3 \theta_0 \theta_3.$$

Es möge noch ein weiteres Additionstheorem zwischen Producten von vier Factoren aufgestellt werden.

Dasselbe gehört zu dem Schema:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = 1,$	$\mu_3 = 7,$	$\mu_4 = 7$	
2	2	0	0	$m_1 = 2,$
0	0	2	2	$m_2 = 14,$
1	-1	1	-1	$m_3 = 4,$
7	-7	-1	1	$m_4 = 28$

und lautet:

$$7)\qquad 2^4 . \prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau).$$

Aus den Congruenzen für die Grössen g folgen die weiteren:

$$g_1 \equiv 0 \mod 2, \quad g_2 \equiv 0 \mod 14, \quad g_4 \equiv 0 \mod 7, \quad g_3 \equiv \frac{g_4}{7} \mod 8,$$

$$g_1 + \frac{g_2}{7} + g_3 + \frac{g_4}{7} \equiv 0 \mod 4.$$

Wir setzen nun erstens an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2$$

resp.:

$$v_1 + \frac{1}{2}, \quad v_2 + \frac{1}{2},$$

so geht w_1 in $w_1 + 1$ über. Wir setzen zweitens an Stelle von v_3, v_4 resp.: $v_3 + \frac{1}{2}$, $v_4 + \frac{1}{2}$, so geht w_2 in $w_2 + 1$ über.

Wenden wir dann die analogen Betrachtungen wie früher an, so ergiebt sich die Gleichung:

$$2^2 . F_1 . F_2 = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = 0$ ist und $\mathfrak{g}_3$ und $\mathfrak{g}_4$ die Werthe annehmen:

$$\mathfrak{g}_3 : 0, 1, 2, 3,$$

$$\mathfrak{g}_4 : 0, 7, 14, 21,$$

während F_1 und F_2 die Werthe haben:

$$F_1 = \vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_2) + \vartheta_0(v_1)\,\vartheta_0(v_2),$$

$$F_2 = \vartheta_3(v_3, 7\tau)\,\vartheta_3(v_4, 7\tau) + \vartheta_0(v_3, 7\tau)\,\vartheta_0(v_4, 7\tau).$$

Setzen wir endlich an Stelle von:

$$v_1 \quad , \quad v_2 \quad , \quad v_3 \quad , \quad v_4$$

resp.:

$$v_1 + \frac{\tau}{2}, \quad v_2 - \frac{\tau}{2}, \quad v_3 + \frac{7\tau}{2}, \quad v_4 - \frac{7\tau}{2},$$

so geht w_3 in $w_3 + 4\tau$ über. Bilden wir die entsprechende Gleichung, addiren und subtrahiren sie von der zuletztgefundenen und setzen die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Relationen:

8) $(\vartheta_3^2+\vartheta_0^2)(\theta_3^2+\theta_0^2)+\vartheta_2^2.\theta_2^2=2\vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(0,14\tau)(\vartheta_3.\theta_3+\vartheta_0.\theta_0+\vartheta_2.\theta_2)$

9) $(\vartheta_3^2+\vartheta_0^2)(\theta_3^2+\theta_0^2)-\vartheta_2^2.\theta_2^2=4A\vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(0,14\tau)$

$$A=\vartheta_0(0,4\tau)\vartheta_0(0,28\tau)+2\vartheta_0[1](0,4\tau)\vartheta_0[7](0,28\tau).$$

Bei Einführung der ursprünglichen und der transformirten Moduln kann die erste Gleichung auch geschrieben werden:

10) $(1+k')(1+c')+kc=\sqrt{(1+k')(1+c')}\,(1+\sqrt{kc}+\sqrt{k'c'}).$

§ 5.

Die Transformation elften Grades.

Für diese Transformation soll ein Additionstheorem entwickelt werden, wobei zu bemerken ist, dass auch diese Entwickelung von Röseberg aufgestellt worden ist.

Das Additionstheorem gehört zu dem Schema:

$\mu_1=1,$	$\mu_2=1,$	$\mu_3=11,$	$\mu_4=11$	
1	2	1	0	$m_1=4,$
2	-1	0	1	$m_2=4,$
11	0	-1	-2	$m_3=44,$
0	11	-2	1	$m_4=44,$

und möge geschrieben werden:

1) $2^4.\vartheta_3(v_1,\tau)\vartheta_3(v_2,\tau)\vartheta_3(v_3,11\tau)\vartheta_3(v_4,11\tau)=\sum\prod\vartheta_3\left[\frac{g_\varepsilon}{2}\right](w_\varepsilon+\eta_\varepsilon,m_\varepsilon\tau).$

Die Grössen g leisten den Congruenzen Genüge:

$$\begin{aligned}
g_1 &\equiv s_1+2s_2+11s_3 \quad mod\,8,\\
g_2 &\equiv 2s_1-s_2+11s_4 \quad mod\,8,\\
\frac{g_3}{11} &\equiv s_1-s_3-2s_4 \quad mod\,8,\\
\frac{g_4}{11} &\equiv s_2-2s_3+s_4 \quad mod\,8.
\end{aligned}$$

Die Substitutionen, die in diesem Falle anzuwenden sind, sind aus dem Schema bestimmt:

$$\begin{array}{llllll}
\text{I.} & v_1+\frac{1}{2}, & v_3-\frac{1}{2}, & v_4-1, & w_3+4, \\
\text{II.} & v_2+\frac{1}{2}, & v_3-1, & v_4+\frac{1}{2}, & w_4+4, \\
\text{III.} & v_1+\frac{\tau}{2}, & v_3+\frac{11\tau}{2}, & v_2+\tau, & w_1+4\tau, \\
\text{IV.} & v_2-\frac{\tau}{2}, & v_4+\frac{11\tau}{2}, & v_1+\tau, & w_2+4\tau.
\end{array}$$

Nach Anwendung der beiden ersten Substitutionen und durch Addition ergiebt sich:

$$4 \cdot f_1 \cdot f_2 = \sum \prod \vartheta_3[\mathfrak{g}_\varepsilon](w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Grössen $\mathfrak{g}_\varepsilon$ den analogen Congruenzen wie die Grössen g aber nach dem Modul 4 Genüge leisten und f_1 und f_2 gesetzt ist gleich:

$$f_1 = \vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 11\tau) + \vartheta_0(v_1, \tau)\,\vartheta_0(v_3, 11\tau),$$
$$f_2 = \vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_4, 11\tau) + \vartheta_0(v_2, \tau)\,\vartheta_0(v_4, 11\tau).$$

Wenden wir die Substitutionen III und IV an, subtrahiren und setzen die Argumente gleich Null, so erhalten wir die Transformationsgleichung:

$$2)\quad (\vartheta_3 \cdot \theta_3 + \vartheta_0 \cdot \theta_0)^2 - 2\vartheta_2 \cdot \theta_2(\vartheta_3 \cdot \theta_3 - \vartheta_0 \cdot \theta_0) + \vartheta_2^2 \cdot \theta_2^2 = 4A,$$
$$A = \vartheta_0^2(0, 4\tau)\,\vartheta_0^2(0, 44\tau) - 4\vartheta_0^2[1](0, 4\tau)\,\vartheta_0^2[11](0, 44\tau).$$

Unter Hinzunahme der bekannten Beziehungen der quadratischen Transformation können wir diese Gleichung auch schreiben:

$$3)\quad (\vartheta_3 \cdot \theta_3 + \vartheta_0 \cdot \theta_0)^2 - 2\vartheta_2 \cdot \theta_2(\vartheta_3 \cdot \theta_3 - \vartheta_0 \cdot \theta_0) + \vartheta_2^2 \cdot \theta_2^2$$
$$= 2\sqrt{\vartheta_0 \cdot \vartheta_3 \cdot \theta_0 \cdot \theta_3}\,\sqrt{2(\vartheta_3^2 \cdot \theta_3^2 + \vartheta_0^2 \cdot \theta_0^2 - \vartheta_2^2 \cdot \theta_2^2)}.$$

Unter Einführung der ursprünglichen und der transformirten Moduln können wir die Modulargleichung schreiben:

$$(1 + \sqrt{k'c'})^2 - \sqrt{kc}(2 - 2\sqrt{k'c'} - \sqrt{kc}) = 2\sqrt[4]{k'c'}\,\sqrt{2(1 - kc + k'c')}.$$

Diese Fälle mögen genügen um zu zeigen, wie man für die einfachsten Transformationsgrade mit Hülfe unserer Additionstheoreme Transformationsgleichungen ableiten kann.

§ 6.[2])

Aufstellung einiger allgemeiner Additionstheoreme für gewisse Zahlkategorien.

Ehe wir nun zu mehr systematischen Untersuchungen übergehen, wollen wir zeigen, wie für gewisse Kategorien von Zahlen allgemeine Additionstheoreme aufgestellt werden können.

Wir nehmen dazu zunächst an, dass die Zahlen μ sämmtlich gleich 1, die Zahlen m sämmtlich einander gleich und zwar gleich dem Transformationsgrade seien, den wir als Quadratzahl n^2 annehmen wollen. Dividiren wir dann die Gleichungen, denen die Transformationscoefficienten Genüge leisten, sämmtlich durch n^2 und nennen die Grössen $a_{rs}:n$, α_{rs}, so leisten die Grössen α_{rs} den Gleichungen Genüge:

$$\sum \alpha_{rr}^2 = 1, \quad \sum \alpha_{rs}\,\alpha_{rt} = 0.$$

Versteht man daher unter $b_{12}, \dots b_{\nu-1,\nu}$ unbestimmte Grössen, setzt ferner fest, dass:

$$b_{rs} + b_{sr} = 0, \quad b_{11} = b_{22} = \cdots b_{\nu\nu} = \omega$$

sei, so können die Grössen α bekanntlich durch die Ausdrücke dargestellt werden:

$$\alpha_{rs} = \frac{2\omega\beta_{rs}}{B}, \quad \alpha_{rr} = \frac{2\omega\beta_{rr} - B}{B},$$

wenn unter B die Determinante verstanden wird:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\nu} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

und β_{rs} den Coefficienten von b_{rs} in B bezeichnet.

Hieraus ergiebt sich der

Lehrsatz: Lässt eine Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\nu} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu 1} & b_{\nu 2} & \dots & b_{\nu\nu} \end{vmatrix} = B,$$

wobei die Grössen b die vorhin angegebenen Bedingungen erfüllen, so gehört zu dem Transformationsgrad n^2 ein Additionstheorem zwischen Producten von je ν Factoren, bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts dagegen gleich n^2 sind und welches dem Schema entspricht:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu}. \end{matrix}$$

In diesem Schema ist gesetzt:

$$a_{rs} = 2\omega\beta_{rs}, \quad a_{rr} = 2\omega\beta_{rr} - B.$$

Die Grössen ω und β haben die vorhin angegebene Bedeutung.

Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir für die genannten Transformationsgrade Multiplicatorbeziehungen.

Ein zweiter Fall ist der folgende. Hat der Transformationsgrad die Form 2^ν, so kann jedenfalls ein Additionstheorem zwischen Producten von je 2^ν Factoren aufgestellt werden, bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts gleich 2^ν sind und welches zu einem Schema:

$$\begin{matrix} a_{11} & \dots a_{1\,n-1} \\ a_{21} & \dots a_{2\,n-1} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1\,1} & \dots a_{n-1\,n-1} \end{matrix}$$

gehört, dessen Zahlen sämmtlich gleich $+1$ oder gleich -1 sind. Hierbei haben wir

$$n = 2^\nu + 1$$

gesetzt. Der Beweis ist so einfach, dass von ihm füglich abgesehen werden kann.

Hieraus folgt unmittelbar, dass für die Zahl n ein Additionstheorem zwischen Producten von je n Factoren aufgestellt werden kann, bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts dagegen resp. gleich sind:

$$m_1 = n, \quad m_2 = 2^\nu n, \quad m_3 = \cdots m_n = 2^\nu,$$

und welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} 1 & a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} \\ 2^\nu & -a_{11} & \dots & -a_{1\,n-1} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2\,n-1} \\ . & . & . & . \\ 0 & a_{n-1\,1} & \dots & a_{n-1\,n-1}. \end{matrix}$$

So gehört zu dem Transformationsgrade $n = 9$ z. B. ein Additionstheorem, welches dem Schema entspricht:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1. \end{matrix}$$

Die Zahlen μ haben den Werth 1, die Zahlen m dagegen sind resp. gleich: $m_1 = 9$, $m_2 = 72$, $m_2 = m_4 = \cdots m_9 = 8$.

Wir können noch allgemeiner so sagen. Bestimmen wir ein Schema:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1\,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2\,n-1} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1\,1} & & \dots a_{n-1\,n-1} \end{matrix}$$

derart, dass die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts resp. gleich sind:

$$m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^{r_1}, \dots \; m_{n-1} = 2^{r_{n-2}}$$

so existirt für den Transformationsgrad:

$$n = 2^r + 1$$

ein Additionstheorem zwischen Producten von je n Factoren, bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts gleich sind:

$$m_1 = n, \quad m_2 = 2^r . n, \quad m_3 = 2^{r_1}, \dots \; m_n = 2^{r_{n-2}}.$$

So gehört zu dem Falle $n = 9$ ein weiteres Additionstheorem, welches dem Schema entspricht:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1.
\end{array}$$

Die Zahlen m haben die Werthe:

$$m_1 = 9, \quad m_2 = 72, \quad m_3 = 8, \quad m_4 = m_5 = \cdots m_9 = 4.$$

Zu demselben Transformationsgrad gehört endlich drittens ein Additionstheorem, welches dem Schema entspricht:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.
\end{array}$$

Die Zahlen m haben die Werthe:

$$m_1 = 9, \quad m_2 = 72, \quad m_3 = 8, \quad m_4 = m_5 = 4, \quad m_6 = m_7 = m_8 = m_9 = 2.$$

§ 7.

Entwickelung von Additionstheoremen zwischen Producten von zwei Factoren.

Nachdem nunmehr für einzelne Zahlen und Zahlkategorien Additionstheoreme aufgestellt und für die Transformationstheorie verwerthet

worden sind, gehen wir jetzt dazu über, in systematischer Weise für Zahlclassen die möglichen Theoreme zu entwickeln, und zwar legen wir als leitenden Gesichtspunkt zunächst die Zahl der Factoren zu Grunde, aus denen die einzelnen Producte bestehen. Das erste Problem lautet dann, es sollen alle überhaupt in Betracht kommenden Additionstheoreme zwischen Producten von zwei Factoren entwickelt werden. Dabei kommen nur diejenigen Theoreme in Betracht, bei welchen die Zahlen μ auf der linken Seite die Werthe $1, 2, n, 2n$ annehmen, die Zahlen m auf der rechten Seite dagegen die Werthe 2^r, $2^s n$.

Es besteht nun allgemein das Additionstheorem:

$$1)\quad \vartheta_3(v_1, \mu_1\tau)\,\vartheta_3(v_2, \mu_2\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, m_1\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, m_2\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \end{matrix}$$

Zwischen den Transformationszahlen bestehen die Gleichungen:

$$\mu_1 a_{11}^2 + \mu_2 a_{12}^2 = m_1,$$
$$\mu_1 a_{21}^2 + \mu_2 a_{22}^2 = m_2,$$
$$\mu_1 a_{11} a_{21} + \mu_2 a_{12} a_{22} = 0.$$

Wir wollen nun die folgenden Werthcombinationen der Zahlen μ und m ins Auge fassen:

$$1.\quad \mu_1 = 1,\quad \mu_2 = 1,\quad m_1 = 2^r n,\quad m_2 = 2^s n.$$

In diesem Falle nehmen die vorhin aufgestellten Gleichungen die Form an:

$$m_1 a_{21}^2 - m_2 a_{12}^2 = 0,$$
$$m_2 a_{11}^2 - m_1 a_{22}^2 = 0,$$

oder also wir erhalten:

$$a_{21}^2 = 2^{s-r}.\, a_{12}^2,\quad a_{22}^2 = 2^{s-r}.\, a_{11}^2.$$

Unter solchen Umständen ergiebt sich der

Lehrsatz: Leistet eine Zahl n der Gleichung Genüge:

$$2^r n = \alpha^2 + \beta^2$$

und ist:

$$s \equiv r \bmod 2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r n\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\omega\beta & \omega\alpha \end{matrix}$$

wobei ω den Werth besitzt:

$$\omega = 2^{\frac{s-r}{2}}$$

Wir setzen jetzt:

$$\text{II.} \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s . n.$$

Wenn dann r eine ungerade Zahl bedeutet, so ist der Ansatz möglich:

$$2^r = a_{11}^2 + a_{12}^2,$$

wobei die Grössen a_{11} und a_{12} die Werthe haben:

$$a_{11} = a_{12} = 2^{\frac{r-1}{2}}.$$

Es müssen folglich die Gleichungen bestehen:

$$2^r . a_{21}^2 - 2^{s+r-1} . n = 0,$$

$$2^{s+r-1} . n - 2^r . a_{22}^2 \quad = 0.$$

Mithin erhalten wir:

$$a_{21}^2 = a_{22}^2 = 2^{s-1} . n$$

und damit den

Lehrsatz: Ist r eine ungerade, s eine gerade Zahl, ferner $n = 2\alpha^2$, so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, \tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\, \vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} 2^{\frac{r-1}{2}} & 2^{\frac{r-1}{2}} \\ 2^{\frac{s}{2}}\alpha & -2^{\frac{s}{2}}\alpha. \end{matrix}$$

Der Fall eines geraden r führt zu keinen irgend wie wichtigen Additionstheoremen, eben so wenig wie der Fall:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s.$$

Wir nehmen jetzt:

$$\text{III.} \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad m_1 = 2^r . n, \quad m_2 = 2^s . n.$$

Es muss dann die Zerlegung stattfinden:

$$2^r . n = a_{11}^2 + 2a_{12}^2,$$

ferner folgt unmittelbar aus den aufgestellten Gleichungen:

$$a_{21}^2 = 2^{s-r+1} . a_{12}^2, \quad a_{22}^2 = 2^{s-r-1} . a_{11}^2,$$

oder also wir erhalten den

Lehrsatz: Leistet eine Zahl n der Gleichung Genüge:

$$2^r . n = \alpha^2 + 2\beta^2$$

und ist:

$$s + 1 - r \equiv 0 \mod 2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r n\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -2\omega\beta & \omega\alpha \end{matrix}$$

wenn ω den Werth besitzt:

$$\omega = 2^{\frac{s-1-r}{2}}.$$

Hätten wir $\mu_2 = 2^\varrho$ gesetzt, so hätte sich wesentlich Neues nicht ergeben können, da wir die Quadratzahl, die in 2^ϱ enthalten ist, mit den Zahlen a_{12}^2 und a_{22}^2 zusammenziehen können.

Wir nehmen jetzt:

$$\text{IV.} \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s . n.$$

Es müsste dann sein:

$$2^r = a_{11}^2 + 2a_{12}^2.$$

Nehmen wir an, dass r ungerade ist, so folgt:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 2^{\frac{r-1}{2}},$$

ferner muss $a_{22} = 0$ sein oder also wir erhalten den

Lehrsatz: Ist r eine ungerade Zahl und leistet n der Gleichung Genüge:
$$2^s . n = \alpha^2,$$
so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} 0 & 2^{\frac{r-1}{2}} \\ \alpha & 0. \end{matrix}$$

Analog wäre der Fall zu behandeln, wenn r eine gerade Zahl bedeutet, ferner führt der Fall:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s$$

zu keinem irgend wie wichtigen Theorem.

Wir setzen jetzt:

$$\text{V.} \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = n, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s . n,$$

so gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2^r &= a_{11}^2 + n a_{12}^2, \\ 2^s . n &= a_{21}^2 + n a_{22}^2, \\ a_{11}a_{21} &+ n a_{12} a_{22} = 0. \end{aligned}$$

Sind die Zahlen a_{11} und a_{12} aus der ersten dieser drei Gleichungen bestimmt, so können wir

$$a_{21} = -2^{\frac{s-r}{2}}.na_{12},$$
$$a_{22} = 2^{\frac{s-r}{2}}.a_{11}$$

setzen oder also wir erhalten den

Lehrsatz: Leistet n der Gleichung Genüge:

$$2^r = \alpha^2 + n\beta^2,$$

und ist $s \equiv r \mod 2$, so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, n\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\omega\beta n & \omega\alpha, \end{matrix}$$

wobei gesetzt ist:

$$\omega = 2^{\frac{s-r}{2}}.$$

Die beiden Fälle:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = n, \quad m_1 = 2^r.n, \quad m_2 = 2^s.n$$

und:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = n, \quad m_1 = 2^r \quad, \quad m_2 = 2^s$$

führen zu keinen irgend wie wichtigen Theoremen.

Ganz analog wie der Fall V ist der Fall zu behandeln:

VI. $\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2n, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s.n.$

Wir erhalten den

Lehrsatz: Leistet n der Gleichung Genüge:

$$2^r = \alpha^2 + 2n\beta^2,$$

ist ferner $s \equiv r + 1 \mod 2$, so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2n\tau) = \sum \vartheta_3[g_1](w_1, 2^r\tau)\,\vartheta_3[g_2](w_2, 2^s n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ -2n\omega\beta & \omega\alpha \end{matrix}$$

wobei gesetzt ist:

$$\omega = 2^{\frac{s-r-1}{2}}.$$

Die weiteren möglichen Fälle führen zu keinem wichtigen Additionstheorem.

§ 8.

Entwickelung von Additionstheoremen zwischen Producten von je drei Factoren.

Wir wenden uns nunmehr zu Additionstheoremen, die zwischen Producten von je drei Factoren bestehen. Hierbei können die Zahlen μ die Werthe $1, 2, n, 2n$ annehmen, die Zahlen m die Werthe $2^r . n, 2^s$.

Wir setzen nun:

$$\text{I.} \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad m_1 = m_2 = m_3 = n.$$

Die Bedingungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= n, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= n, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= n, & a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen folgen dann die Beziehungen:

$$\begin{aligned} a_{11} : a_{12} : a_{13} &= \delta_1 : \delta_2 : \delta_3, \\ \delta_1 &= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\ \delta_2 &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \\ \delta_3 &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Relation:

$$n a_{1\varrho}^2 = \delta_\varrho^2,$$

oder also es muss n eine Quadratzahl sein. Ist diese Eigenschaft erfüllt, so können wir leicht mit Hülfe bekannter Parameterdarstellungen entsprechende Additionstheoreme finden. In der That, setzen wir — was stets möglich ist:

$$\sqrt{n} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

so können wir für die Zahlen a die folgenden Werthe wählen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2, & a_{12} &= 2(\alpha\beta - \gamma\delta), & a_{13} &= 2(\alpha\gamma + \beta\delta), \\ a_{21} &= -2(\alpha\beta + \gamma\delta), & a_{22} &= \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2, & a_{23} &= 2(\alpha\delta - \beta\gamma), \\ a_{31} &= -2(\alpha\gamma - \beta\delta), & a_{32} &= -2(\alpha\delta + \beta\gamma), & a_{33} &= \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2. \end{aligned}$$

Es möge dieses das Gleichungssystem 1) sein, dann können wir den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz: Ist n eine Quadratzahl, welche der Gleichung Genüge leistet:

$$\sqrt{n} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau), \qquad \varepsilon = 1, 2, 3$$

welches zu dem Gleichungssystem 1) gehört.

Wir setzen nunmehr:

II. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad m_2 = 2^r n, \quad m_2 = 2^s n, \quad m_3 = 2^t.$

In diesem Falle müsste sein:

$$2^t = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2.$$

Ist $t = 1$, so ist nur eine Zerlegung möglich:

$$2 = 1 + 1 = 1^2 + (-1)^2,$$

ist $t = 2$, so ist ebenfalls nur eine Zerlegung möglich und zwar:

$$4 = 2^2.$$

Auf diese beiden Fälle kann der allgemeine zurückgeführt werden. In der That, ist $t > 2$, so müssen jedenfalls die drei Zahlen a_{31}, a_{32}, a_{33} gerade Zahlen sein. Setzen wir:

$$a_{3\varrho} = 2a'_{3\varrho},$$

so würde folgen:

$$2^{t-2} = a'^2_{31} + a'^2_{32} + a'^2_{33}$$

und daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar. Nehmen wir nun an, dass t ungerade ist, so folgt als einzige Zerfällung:

$$2^t = \left(2^{\frac{t-1}{2}}\right)^2 + \left(2^{\frac{t-1}{2}}\right)^2,$$

nehmen wir an, dass t gerade ist, die einzige Zerfällung:

$$2^t = \left(2^{\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Wir wollen nun lediglich den Fall ins Auge fassen, dass t ungerade ist, da der zweite Fall zu unwichtige Resultate ergiebt, dann können wir, ohne der Allgemeinheit im Wesentlichen Abbruch zu thun, annehmen, dass $t = 1$ ist und erhalten das Gleichungssystem:

$$2^r.n = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2, \quad a_{11} - a_{12} = 0,$$
$$2^s.n = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2, \quad a_{21} - a_{22} = 0,$$
$$2 = 1^2 + (-1)^2, \quad 2a_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} = 0.$$

Den Gleichungen wird Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$a_{21} = 2^{\frac{s-r-1}{2}}.a_{13}, \quad a_{23} = -2^{\frac{s-r+1}{2}}.a_{11}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Lässt die Zahl $2^r.n$ sich in die Form bringen:

$$2^r.n = 2\alpha^2 + \gamma^2$$

und ist $r \equiv s + 1 \mod 2$, so gilt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau)$$
$$m_1 = 2^r n, \quad m_2 = 2^s n, \quad m_3 = 2,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \omega\gamma & \omega\gamma & -2\omega\alpha \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$$

wenn gesetzt ist:

$$\omega = 2^{\frac{s-r-1}{2}}.$$

Der hieran sich anschliessende Fall:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad m_1 = 2^r . n, \quad m_2 = 2^s, \quad m_3 = 2^t$$

kann als zu unwichtig fortgelassen werden.

Wir nehmen jetzt:

$$\text{III.} \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 2, \quad m_1 = m_2 = m_3 = n.$$

Die Bedingungsgleichungen erhalten die Form:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + 2a_{13}^2 = n, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + 2a_{13}a_{23} = 0,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + 2a_{23}^2 = n, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + 2a_{23}a_{33} = 0,$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + 2a_{33}^2 = n, \quad a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + 2a_{33}a_{13} = 0.$$

Jedenfalls ist so viel klar, dass n das Doppelte einer Quadratzahl sein muss. Ist dasselbe der Fall, so ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der beiden Sätze:

Lehrsatz: Ist n das Doppelte einer Quadratzahl und lässt es sich in die Form bringen:

$$n = 2(\alpha^2 + \beta^2),$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & -\alpha \\ \sqrt{\frac{n}{2}} & -\sqrt{\frac{n}{2}} & 0. \end{matrix}$$

Lehrsatz: Ist n das Doppelte einer Quadratzahl und lässt es sich in die Form bringen:

$$n = 2(\alpha^2 + 2\beta^2),$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \sqrt{\frac{n}{2}} & \alpha & \beta \\ -\sqrt{\frac{n}{2}} & \alpha & \beta \\ 0 & 2\beta & -\alpha \end{matrix}$$

Diese beiden Sätze können aber verallgemeinert werden.

In der That, wir wollen zunächst der einfacheren Bezeichnungsweise wegen setzen:

$$a_{11} = \alpha, \quad a_{12} = -\beta, \quad a_{13} = \gamma, \quad a_{23} = \alpha_1, \quad a_{33} = \beta_1,$$

so muss n sich in die Form bringen lassen:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma^2).$$

Aus den Bedingungsgleichungen folgt:

$$a_{21} = \frac{\beta}{\alpha} a_{22} - \frac{2\gamma}{\alpha} \alpha_1,$$

sodass sich für a_{22} die quadratische Gleichung ergiebt:

$$(\alpha^2 + \beta^2) a_{22}^2 - 4\beta\gamma a_{22} \alpha_1 = \alpha^2 . n - 2\alpha^2 . \alpha_1^2 - 4\alpha_1^2 . \gamma^2.$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung nach a_{22} erhalten wir:

$$a_{22} = \frac{2\beta\gamma\alpha_1 \pm \alpha\beta_1 \sqrt{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Die drei noch fehlenden Transformationszahlen sind genau so zu bestimmen, wobei zu bemerken ist, dass die gefundenen Werthe nur dann brauchbar sind, wenn sie ganze Zahlen sind.

Wenn $\alpha^2 + \beta^2$ gleich dem Producte einer ungeraden Primzahl mit 2 resp. einer Potenz von 2 ist, so ist dasselbe bei einem Vorzeichen stets der Fall.

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz, der die beiden vorigen als specielle Fälle in sich fasst:

Lehrsatz: Ist n das Doppelte einer Quadratzahl und lässt es sich in die Form bringen:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma^2),$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, \tau)\, \vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau),$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha, & -\beta, & \gamma \\ \dfrac{-2\alpha\alpha_1\gamma \pm \beta\beta_1\sqrt{2n}}{\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{2\beta\gamma\alpha_1 \pm \alpha\beta_1\sqrt{2n}}{\alpha^2+\beta^2}, & \alpha_1, \\ \dfrac{-2\alpha\beta_1\gamma \pm \beta\alpha_1\sqrt{2n}}{\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{2\beta\gamma\beta_1 \pm \alpha\alpha_1\sqrt{2n}}{\alpha^2+\beta^2}, & \beta_1. \end{matrix}$$

Ist z. B. $n = 98$, so ergiebt sich das Schema:

$$\begin{matrix} 8 & -4 & 3 \\ -5 & -1 & 6 \\ 3 & 9 & 2 \end{matrix}$$

Der Fall, dass die Moduln auf den rechten Seiten gleich $2^r . n\tau$, $2^s . n\tau$, $2^t . n\tau$ sind, kann füglich fortgelassen werden.

Wir wollen ferner die Annahme machen:

IV. $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$, $m_1 = 2^r . n$, $m_2 = 2^s . n$, $m_3 = 2^t$.

In diesem Falle müsste die Gleichung bestehen:

$$2^t = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 2a_{33}^2.$$

Nehmen wir jetzt an, dass $t > 2$ ist, so müssen die Zahlen a_{31}, a_{32}, a_{33} jedenfalls gerade sein. Dividiren wir daher die letzte Gleichung durch 4, so würden wir eine Gleichung von der Form erhalten:

$$2^{t-2} = a'^2_{31} + a'^2_{32} + 2a'^2_{33}.$$

Wir können das Problem demnach bis auf die Fälle $t = 1$, $t = 2$ reduciren. Wir wollen den Fall $t = 1$ als zu unwichtig ausser Auge lassen, so bleibt $t = 2$ übrig und zwar können wir dann schreiben:

$$4 = 1^2 + 1^2 + 2 . 1^2.$$

Auf diesen Fall wollen wir uns beschränken und demgemäss setzen:

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = 1.$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Form an:

$$2^r . n = a_{11}^2 + a_{12}^2 + 2a_{13}^2, \quad a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = 0,$$
$$2^s . n = a_{21}^2 + a_{22}^2 + 2a_{23}^2, \quad a_{21} + a_{22} + 2a_{23} = 0,$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + 2a_{13}a_{23} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$2^{r-1} . n = (a_{11} + a_{13})^2 + 2a_{13}^2,$$
$$2^{s-1} . n = (a_{21} + a_{23})^2 + 2a_{23}^2,$$
$$(a_{11} + a_{13})(a_{21} + a_{23}) + 2a_{13}a_{23} = 0.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Findet eine Gleichung statt:

$$2^{r-1} . n = \alpha^2 + 2\beta^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, 2\tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\xi](w_\xi\, m_\xi \tau),$$
$$m_1 = 2^r . n, \quad m_2 = 2^s . n, \quad m_3 = 4,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha - \beta, & -\alpha - \beta, & \beta \\ \omega(\alpha + 2\beta), & \omega(\alpha - 2\beta), & -\omega\alpha \\ 1, & 1, & 1, \end{matrix}$$

wobei gesetzt ist:

und:

$$\omega = 2^{\frac{s-1-r}{2}}$$

ist.

$$s = 1 + r \bmod 2$$

Der Fall:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 2, \quad m_1 = 2^r n, \quad m_2 = 2^s, \quad m_3 = 2^t$$

führt zu keinen wichtigen Resultaten, ebenso wenig der Fall:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 2, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s, \quad m_3 = 2^t.$$

Wir nehmen jetzt:

V. $\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = n, \quad m_1 = 2^r . n, \quad m_2 = 2^s . n, \quad m_3 = 2^t . n.$

In diesem Falle müssen die Gleichungen bestehen:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + n a_{13}^2 = 2^r . n, \quad a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + n a_{13} a_{23} = 0,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + n a_{23}^2 = 2^s . n, \quad a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + n a_{23} a_{33} = 0,$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + n a_{33}^2 = 2^t . n, \quad a_{31} a_{11} + a_{32} a_{12} + n a_{33} a_{13} = 0.$$

Jedenfalls müssen die drei Ausdrücke:

$$n(2^r - a_{13}^2), \quad n(2^s - a_{23}^2), \quad n(2^t - a_{33}^2)$$

sich als Summen zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Dasselbe würde von den drei Ausdrücken gelten:

$$n[2^r + 2^s - (a_{13} + a_{23})^2], \quad n[2^s + 2^t - (a_{23} + a_{33})^2], \quad n[2^t + 2^r - (a_{33} + a_{13})^2].$$

Dann aber folgt, dass $2^r - a_{13}^2$ einen Primfactor von der Form $4l + 3$ nicht eine ungerade Anzahl mal besitzen darf. In der That, wäre dasselbe der Fall, so müsste ihn n auch eine ungerade Zahl mal besitzen, denn sonst könnte $n(2^r - a_{13}^2)$ sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen.

Dasselbe würde für:

$$2^r - a_{23}^2, \quad 2^t - a_{33}^2, \quad 2^r + 2^s - (a_{13} + a_{23})^2 \text{ etc.}$$

gelten, also müssten auch die Producte:

$$a_{13} a_{23}, \quad a_{23} a_{33}, \quad a_{33} a_{13}$$

durch die Primzahl von der Form $4l + 3$ theilbar sein. Das führt zu einem Widerspruch, denn besässe z. B. a_{13} den definirten Primfactor, so könnte ihn $2^r - a_{13}^2$ nicht besitzen.

Unter solchen Umständen müssen die Ausdrücke:

$$2^r - a_{13}^2, \quad 2^s - a_{23}^2, \quad 2^t - a_{33}^2$$

die Form haben:

$$(4m + 1) 2^\mu,$$

— den Fall, dass eine der drei Grössen gleich Null ist, wollen wir als zu unwichtig ausschliessen.

Unter solchen Umständen können die drei Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33} nur die Werthe 0 oder $2^{\frac{r-1}{2}}, 2^{\frac{s-1}{2}}, 2^{\frac{t-1}{2}}$ annehmen. Alle drei Grössen können nicht von Null verschieden sein, denn es besteht ja die Gleichung:

$$\frac{a_{13}^2}{2^r}+\frac{a_{23}^2}{2^s}+\frac{a_{33}^2}{2^t}=1,$$

und diese würde im Falle, dass die Grössen a die Werthe besitzen:

$$a_{13}=2^{\frac{r-1}{2}},\quad a_{23}=2^{\frac{s-1}{2}},\quad a_{33}=2^{\frac{t-1}{2}}$$

zu einem Widerspruch führen.

Ebenso wenig können zwei oder drei der Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33} gleich Null sein — es bleibt also nur der Fall übrig, dass zwei von ihnen von Null verschieden, die dritte dagegen gleich Null sei. Wir nehmen an, es sei dieses a_{33}, so ergiebt sich:

$$a_{13}=2^{\frac{r-1}{2}},\quad a_{23}=2^{\frac{s-1}{2}},\quad a_{33}=0.$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} &a_{11}^2+a_{12}^2=2^{r-1}.n, && a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}=0,\\ &a_{21}^2+a_{22}^2=2^{s-1}.n, && a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}=0,\\ &a_{31}^2+a_{32}^2=2^t.n\ , && a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\omega n=0,\end{aligned}$$

$$\omega=2^{\frac{r+s-1}{2}}.$$

Die Bestimmung der noch fehlenden Grössen aus diesen Gleichungen hat keine Schwierigkeit. Wir erhalten den

Lehrsatz: Lässt sich die Zahl n in die Form bringen:

$$n=\alpha^2+\beta^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,\tau)\,\vartheta_3(v_3,n\tau)=\sum\prod\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon,m_\varepsilon\tau),$$

$$m_1=2^r.n,\quad m_2=2^s.n,\quad m_3=2^t.n,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} 2^{\frac{r-1}{2}}\alpha, & 2^{\frac{r-1}{2}}\beta, & 2^{\frac{r-1}{2}},\\ 2^{\frac{s-1}{2}}\alpha, & 2^{\frac{s-1}{2}}\beta, & -2^{\frac{s-1}{2}},\\ 2^{\frac{t}{2}}\beta\ , & -2^{\frac{t}{2}}\alpha\ , & 0\ . \end{matrix}$$

Die Zahlen r und s sind ungerade, t gerade.

Der Fall:

$$\mu_1=1,\quad \mu_2=1,\quad \mu_3=n,\quad m_1=2^r.n,\quad m_2=2^s.n,\quad m_3=2^t$$

kann wieder ausser Auge gelassen werden, da er nur unwichtige Theoreme ergiebt.

Wir nehmen jetzt:

VI. $\mu_1=1,\quad \mu_2=1,\quad \mu_3=n,\quad m_1=2^r.n,\quad m_2=2^s,\quad m_3=2^t.$

Die Bedingungsgleichungen können geschrieben werden:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + n a_{13}^2 = 2^r . n, \quad a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + n a_{13} a_{23} = 0,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + n a_{23}^2 = 2^s \quad , \quad a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + n a_{23} a_{33} = 0,$$
$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + n a_{33}^2 = 2^t \quad , \quad a_{11} a_{31} + a_{12} a_{32} + n a_{13} a_{33} = 0.$$

Aus den Bedingungsgleichungen folgt, dass a_{11} und a_{12} durch n als theilbar angenommen werden können. Wir wollen setzen:

$$a_{11} = n\alpha, \quad a_{12} = -n\beta,$$

wir wollen ferner der Einfachheit halber a_{13} durch γ bezeichnen, dann folgt für n die Gleichung:

$$n(\alpha^2 + \beta^2) = 2^r - \gamma^2.$$

Aus den Bedingungsgleichungen folgt:

$$a_{21} = \frac{\beta}{\alpha} a_{22} - \frac{\gamma}{\alpha} a_{23},$$

sodass wir für a_{22} die quadratische Gleichung erhalten:

$$(\alpha^2 + \beta^2) a_{22}^2 - 2\beta\gamma a_{22} a_{23} = \alpha^2(2^s - n a_{23}^2) - \gamma^2 a_{23}^2.$$

Hieraus folgt:

$$a_{22} = \frac{\beta\gamma a_{23}}{\alpha^2 + \beta^2} \pm \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2) 2^s - a_{23}^2 . 2^r}.$$

Wir erhalten für a_{22} einen rationalen Ausdruck, wenn wir setzen:

$$s = r, \quad a_{23} = \alpha$$

und annehmen, dass r eine gerade Zahl ist. Unter diesen Voraussetzungen nämlich können wir schreiben:

$$a_{22} = \frac{\alpha\beta\gamma \pm \alpha\beta . 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ferner ist klar, dass, wenn $\alpha^2 + \beta^2$ eine Primzahl ist, jedenfalls das Vorzeichen so gewählt werden kann, dass a_{22} eine ganze Zahl ist. Wir wollen der einfachen Bezeichnung wegen setzen:

$$w = \frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

dann kann der Werth von a_{22} geschrieben werden:

$$a_{22} = \alpha\beta w.$$

Hiermit sind alle Schwierigkeiten überwunden, und wir erhalten den

Lehrsatz: Leistet n der Gleichung Genüge:

$$n(\alpha^2 + \beta^2) = 2^r - \gamma^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, \tau)\,\vartheta_3(v_3, n\tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$
$$m_1 = 2^r . n, \quad m_2 = 2^r, \quad m_3 = 2^r,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} \alpha n, & -\beta n, & \gamma \\ -\gamma + \beta^2 w, & \alpha\beta w, & \alpha \\ \alpha\beta w, & -\gamma + \alpha^2 w, & -\beta, \end{array}$$

$$w = \frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Das Vorzeichen bei w ist so zu wählen, dass w eine ganze Zahl wird. r ist als gerade Zahl anzunehmen.

Ein ähnliches Resultat würde sich ergeben, wenn wir die Bedingung fallen lassen, dass $r = s$ ist.

Der Fall:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = n, \quad m_1 = 2^r, \quad m_2 = 2^s, \quad m_3 = 2^t$$

führt zu keinen irgend wie wichtigen Theoremen, denn aus der Gleichung:

$$n\left(\frac{a_{13}^2}{2^r} + \frac{a_{23}^2}{2^s} + \frac{a_{33}^2}{2^t}\right) = 1$$

würde folgen, dass n eine Potenz von 2 sein müsste.

Wir kommen zu dem Fall:

VII. $\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad \mu_3 = n, \quad m_1 = 2^r . n, \quad m_2 = 2^s . n, \quad m_3 = 2^t . n.$

In demselben nehmen die Bedingungsgleichungen die Form an:

$$a_{11}^2 + 2a_{12}^2 = n(2^r - a_{13}^2), \quad a_{21}^2 + 2a_{22}^2 = n(2^s - a_{23}^2),$$
$$a_{31}^2 + 2a_{32}^2 = n(2^t - a_{33}^2),$$
$$a_{11}a_{21} + 2a_{12}a_{22} + na_{13}a_{23} = 0, \quad a_{11}a_{31} + 2a_{12}a_{32} + na_{13}a_{33} = 0,$$
$$a_{21}a_{31} + 2a_{22}a_{32} + na_{23}a_{33} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich drei weitere, als deren Repräsentant wir die Gleichung ansehen können:

$$(a_{11} + a_{21})^2 + 2(a_{12} + a_{22})^2 + n(a_{13} + a_{23})^2 = (2^r + 2^s)n.$$

Aus unseren Gleichungen folgt, dass $2^r - a_{13}^2$ keinen Primfactor von der Form $8\varrho + 5$ oder $8\varrho + 7$ eine ungerade Anzahl mal haben kann, denn sonst müsste n und mit ihm $2^s - a_{23}^2$ und $2^t - a_{33}^2$ ihn auch besitzen. Dasselbe würde dann für die Ausdrücke:

$$2^r + 2^s - (a_{13} + a_{23})^2 \text{ etc.}$$

gelten, also müssten die Producte:

$$a_{13}a_{23}, \quad a_{23}a_{33}, \quad a_{33}a_{13}$$

durch eine Primzahl und zwar die vorhin definirte von der Form $8\varrho + 5$ oder $8\varrho + 7$ theilbar sein. Das führt zu einem Widerspruch, denn besässe z. B. a_{13} den definirten Primfactor, so könnte ihn $2^r - a_{13}^2$ nicht besitzen.

Unter solchen Umständen müssen die Ausdrücke:

$$2^r - a_{13}^2, \quad 2^s - a_{23}^2, \quad 2^t - a_{33}^2$$

die Form haben:

$$(8m + 1)2^\mu \quad \text{oder} \quad (8m + 3)2^\mu,$$

wobei wir den Fall, dass eine dieser Grössen Null ist, als zu unwichtig ausschliessen.

Mit Hülfe weniger Schlüsse folgt dann, dass die Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33} die folgenden Werthe annehmen können:

$$0, 2^{\frac{r-1}{2}}, \; 2^{\frac{s-1}{2}}, \; 2^{\frac{t-1}{2}}, \; 2^{\frac{r-2}{2}}, \; 2^{\frac{s-2}{2}}, \; 2^{\frac{t-2}{2}}.$$

Nimmt man die Gleichung hinzu:

$$\frac{a_{13}^2}{2^r} + \frac{a_{23}^2}{2^s} + \frac{a_{33}^2}{2^t} = 1,$$

so folgt, dass zwei Fälle zu erwägen sind:

1) $$a_{13} = 2^{\frac{r-1}{2}}, \quad a_{23} = 2^{\frac{s-2}{2}}, \quad a_{33} = 2^{\frac{t-2}{2}},$$

2) $$a_{13} = 2^{\frac{r-1}{2}}, \quad a_{23} = 2^{\frac{s-1}{2}}, \quad a_{33} = 0.$$

Im ersten Falle wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass:

$$r = 1, \quad s = 2, \quad t = 2$$

sei, dann erhalten wir die Gleichungen:

$$a_{11}^2 + 2a_{12}^2 = n, \quad a_{21}^2 + 2a_{22}^2 = 3n, \quad a_{31}^2 + 2a_{32}^2 = 3n,$$
$$a_{11}a_{21} + 2a_{12}a_{22} + n = 0$$
etc.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich für a_{22} die quadratische Gleichung:

$$a_{22}^2 + 2a_{12}a_{22} = \frac{3a_{11}^2 - n}{2},$$

oder also wir erhalten:

$$a_{22} = -a_{12} \pm a_{11}.$$

Die übrigen Grössen sind dann leicht bestimmt. Behalten wir das untere Zeichen bei, so ergiebt sich der

Lehrsatz: Lässt n sich in die Form bringen:

$$n = \alpha^2 + 2\beta^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau)\,\vartheta_3(v_3,n\tau)=\sum\prod\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon,m_\varepsilon\tau),$$

$$m_1=2n,\quad m_2=4n,\quad m_3=4n,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & 1 \\ -\alpha+2\beta, & -\alpha-\beta, & 1 \\ -\alpha-2\beta, & \alpha-\beta, & 1. \end{matrix}$$

Der Fall allgemeiner Werthe r, s, t ist ganz analog zu behandeln.

Wir nehmen zweitens an, dass die Gleichungen bestehen:

$$a_{13}=2^{\frac{r-1}{2}},\quad a_{23}=2^{\frac{s-1}{2}},\quad a_{33}=0$$

und zwar möge wiederum der Einfachheit halber gesetzt werden:

$$r=1,\quad s=1,$$

so erhalten wir den

Lehrsatz: Lässt n sich in die Form bringen:

$$n=\alpha^2+2\beta^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1,\tau)\,\vartheta_3(v_2,2\tau)\,\vartheta_3(v_3,n\tau)=\sum\prod\vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon,m_\varepsilon\tau),$$

$$m_1=2n,\quad m_2=2n,\quad m_3=2n,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & -1 \\ 2\beta & -\alpha & 0. \end{matrix}$$

Der Fall allgemeiner Werthe r, s, t ist ganz analog zu behandeln.

Den Fall:

$$\mu_1=1,\quad \mu_2=2,\quad \mu_3=n,\quad m_1=2^r.n,\quad m_2=2^s.n,\quad m_3=2^t$$

können wir füglich wieder fortlassen und wenden uns sofort zu dem Falle:

VIII. $\mu_1=1,\quad \mu_1=2,\quad \mu_3=n,\quad m_1=2^r.n,\quad m_2=2^s,\quad m_3=2^t.$

Wir wollen der einfacheren Bezeichnungsweise wegen setzen:

$$a_{11}=\alpha n,\quad a_{12}=-\beta n,\quad a_{13}=\gamma,$$

wobei angenommen ist, dass a_{11} und a_{12} durch n theilbar sind. Es möge in Bezug hierauf auf einige frühere Bemerkungen verwiesen werden.

Dann folgt aus den Bedingungsgleichungen:

$$a_{21}=\frac{2\beta a_{22}-\gamma a_{23}}{\alpha}.$$

Setzen wir diesen Werth von a_{21} in die Gleichung ein:

$$a_{21}^2 + 2a_{22}^2 + na_{23}^2 = 2^s,$$

so erhalten wir für a_{22} eine quadratische Gleichung, aus welcher das Resultat folgt:

$$a_{22} = \frac{\beta\gamma a_{23}}{\alpha^2 + 2\beta^2} \pm \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2\beta^2}\sqrt{\frac{(\alpha^2 + 2\beta^2)2^s - a_{23}^2 . 2^r}{2}}.$$

Es ergiebt sich für a_{22} ein rationaler Ausdruck, wenn wir setzen:

$$a_{23} = \alpha, \quad r = s$$

und zwar erhalten wir:

$$a_{22} = \alpha\beta w,$$

$$w = \frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + 2\beta^2}.$$

Ist $\alpha^2 + 2\beta^2$ eine Primzahl, so kann das Zeichen stets so gewählt werden, dass w eine ganze Zahl ist, wobei vorauszusetzen ist, dass r eine gerade Zahl bedeutet.

Mit diesen Bemerkungen sind alle Schwierigkeiten überwunden. Wir erhalten den

Lehrsatz: Leistet n der Gleichung Genüge:

$$n(\alpha^2 + 2\beta^2) = 2^r - \gamma^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\vartheta_3(v_1, \tau)\,\vartheta_3(v_2, 2\tau)\,\vartheta_3(v_3, n\tau) = \sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon\tau)$$

$$m_1 = 2^r n, \quad m_2 = 2^r, \quad m_3 = 2^{r-1},$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{ccc} n\alpha, & -\beta n, & \gamma \\ -\gamma + 2\beta^2 w, & \alpha\beta w, & \alpha \\ \alpha\beta w, & -\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha^2 w}{2}, & -\beta \end{array}$$

$$w = \frac{\gamma \pm 2^{\frac{r}{2}}}{\alpha^2 + 2\beta^2}.$$

Hiermit sind wir im Wesentlichen am Ziele. Die fehlenden Fälle können entweder auf die bisherigen zurückgeführt werden oder sind so einfach, dass von ihrer Aufstellung abgesehen werden kann.

§ 9.

Entwickelung von Additionstheoremen zwischen Producten von je vier Factoren.

Wir nehmen nun an, dass die Zahl der Factoren in den einzelnen Producten grösser als 3 sei und zwar zunächst gleich 4 und wollen auch hier Additionstheoreme aufstellen. Hierbei gehen wir aber nicht so systematisch vor, wie in den vorigen Paragraphen, sondern begnügen uns damit, einige besonders einfache und naheliegende Additionstheoreme herauszugreifen. Dasselbe soll für den Fall von 6 und 8 Factoren geschehen. Wir sind hierzu um so mehr berechtigt, als in einem der folgenden Paragraphen Regeln angegeben werden sollen, wie Additionstheoreme zwischen Producten von beliebig vielen Factoren in grosser Anzahl aufgestellt werden können.

Wir setzen nun:

I. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = n.$

In diesem Falle lauten die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + a_{\varepsilon 3}^2 + a_{\varepsilon 4}^2 = n,$$
$$a_{\varepsilon 1} a_{r 1} + a_{\varepsilon 2} a_{r 2} + a_{\varepsilon 3} a_{r 3} + a_{\varepsilon 4} a_{r 4} = 0.$$

Diesen Gleichungen kann in einfachster Weise genügt werden. Wir erhalten den

Lehrsatz: Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

— eine Annahme, die immer möglich ist, so existirt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau), \quad \varepsilon = 1, 2, 3, 4,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & -\alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & -\alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & -\alpha. \end{matrix}$$

Zweitens nehmen wir an, dass die Werthe vorgelegt seien:

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = \mu_4 = 2.$$

Dann werden die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + 2a_{\varepsilon 3}^2 + 2a_{\varepsilon 4}^2 = m_\varepsilon,$$
$$a_{\varepsilon 1} a_{r 1} + a_{\varepsilon 2} a_{r 2} + 2a_{\varepsilon 3} a_{r 3} + 2a_{\varepsilon 4} a_{r 4} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich in besonders einfacher Weise auflösen, wenn wir setzen:

$$2m_1 = 2m_2 = 2n = m_3 = m_4.$$

Wir erhalten den

Lehrsatz: Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 + 2\delta^2,$$

so existirt ein Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

für welches die Zahlen μ_ε und m_ε die Werthe besitzen:

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = \mu_4 = 2, \quad 2m_1 = 2m_2 = 2n = m_3 = m_4,$$

und welches dem Schema entspricht:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & -\alpha & \delta & -\gamma \\ 2\gamma & -2\delta & -\alpha & \beta \\ 2\delta & 2\gamma & -\beta & -\alpha. \end{array}$$

Drittens setzen wir:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = n, \quad \mu_4 = n.$$

Die Bedingungsgleichungen nehmen die Form an:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + n a_{\varepsilon 3}^2 + n a_{\varepsilon 4}^2 = m_\varepsilon,$$

$$a_{\varepsilon 1} a_{r 1} + a_{\varepsilon 2} a_{r 2} + n a_{\varepsilon 3} a_{r 3} + n a_{\varepsilon 4} a_{r 4} = 0.$$

Die Gleichungen lassen sich in besonders einfacher Weise auflösen, wenn wir setzen:

$$m_1 = 2^s . n = m_2, \quad m_3 = 2^s = m_4.$$

Wir erhalten den

Lehrsatz: Leistet die Zahl n der Gleichung Genüge:

$$n(\alpha^2 + \beta^2) = 2^s - \gamma^2 - \delta^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = \mu_4 = n, \quad m_1 = m_2 = 2^s . n, \quad m_3 = m_4 = 2^s,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cccc} n\alpha, & n\beta, & \gamma, & \delta \\ n\beta, & -n\alpha, & -\delta, & \gamma \\ \gamma, & \delta, & -\alpha, & -\beta \\ \delta, & -\gamma, & \beta, & -\alpha. \end{array}$$

Viertens setzen wir:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2, \quad \mu_3 = n, \quad \mu_4 = 2n,$$

so nehmen die Bedingungsgleichungen die Form an:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + 2a_{\varepsilon 2}^2 + na_{\varepsilon 3}^2 + 2na_{\varepsilon 4}^2 = m_\varepsilon,$$

$$a_{\varepsilon 1}a_{r1} + 2a_{\varepsilon 2}a_{r2} + na_{\varepsilon 3}a_{r3} + 2na_{\varepsilon 4}a_{r4} = 0.$$

Die Gleichungen lassen sich in besonders einfacher Weise lösen, wenn wir setzen:

$$m_1 = 2^s.n, \quad m_2 = 2^{s+1}.n, \quad m_3 = 2^s, \quad m_4 = 2^{s+1}.$$

Wir erhalten den

Lehrsatz: Lässt eine Zahl n sich so bestimmen, dass sie der Gleichung Genüge leistet:

$$n(\alpha^2 + 2\beta^2) = 2^s - \gamma^2 - 2\delta^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau)$$

$$\mu_1=1,\ \mu_2=2,\ \mu_3=n,\ \mu_4=2n;\ m_1=2^s.n,\ m_2=2^{s+1}.n,\ m_3=2^s,\ m_4=2^{s+1},$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cccc} n\alpha, & n\beta, & \gamma, & \delta \\ 2n\beta, & -n\alpha, & -2\delta, & \gamma \\ \gamma, & \delta, & -\alpha, & -\beta \\ 2\delta, & -\gamma, & 2\beta, & -\alpha. \end{array}$$

Wir setzen fünftens:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad \mu_4 = n,$$

dann werden die Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varepsilon 1}^2 + a_{\varepsilon 2}^2 + a_{\varepsilon 3}^2 + na_{\varepsilon 4}^2 = m_\varepsilon,$$

$$a_{\varepsilon 1}a_{r1} + a_{\varepsilon 2}a_{r2} + a_{\varepsilon 3}a_{r3} + na_{\varepsilon 4}a_{r4} = 0.$$

Wir wollen zwei Fälle betrachten, in denen dieses Gleichungssystem ohne Mühe auflösbar ist.

Zunächst setzen wir:

$$m_1 = m_2 = 2n = 2m_3 = 2m_4.$$

Dann ergiebt sich ohne Mühe der

Lehrsatz: Wenn eine Zahl sich in die Form bringen lässt:

$$n = \left(l - \alpha + \frac{\alpha^2}{l}\right)^2.$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad \mu_4 = n, \quad m_1 = m_2 = 2n = 2m_3 = 2m_4,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \\ \beta & \gamma & \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & 0, \end{array}$$

$$\beta = -\alpha + l, \quad \gamma = \frac{\alpha(\alpha - l)}{l}.$$

Wir wollen nun zweitens annehmen — es ist das im Ganzen der sechste Fall, dass die Zahlen m die Werthe haben:

$$m_1 = 2^q . n, \quad m_2 = 2^r, \quad m_3 = 2^s, \quad m_4 = 2^t,$$

dass ferner die Grösse a_{24} gleich Null sei. Dann folgt aus der Gleichung:

$$2^r = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2,$$

dass wir uns im Wesentlichen auf die beiden Fälle zu beschränken haben:

$$r = 2, \quad a_{21} = 2, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = \quad 0,$$

$$r = 1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = -1.$$

Nur mit dem letzten Falle wollen wir weiter operiren. Wir setzen nun ähnlich wie früher:

$$a_{11} = n\alpha, \quad a_{12} = n\beta, \quad a_{13} = n\gamma, \quad a_{14} = \delta,$$

dann müssen jedenfalls die Gleichungen bestehen:

$$\beta - \gamma = 0, \quad a_{32} - a_{33} = 0, \quad a_{42} - a_{43} = 0,$$

sodass die übrig bleibenden Bedingungsgleichungen die Form annehmen:

$$2^q = (\alpha^2 + 2\beta^2)n + \delta^2,$$

$$2^s = a_{31}^2 + 2a_{32}^2 + na_{34}^2,$$

$$2^t = a_{41}^2 + 2a_{42}^2 + na_{44}^2,$$

$$\alpha a_{31} + 2\beta a_{32} + n\delta a_{34} = 0,$$

$$\alpha a_{41} + 2\beta a_{42} + n\delta a_{44} = 0,$$

$$a_{31}a_{41} + 2a_{32}a_{42} + na_{34}a_{44} = 0.$$

Demgemäss ergiebt sich für a_{32} die quadratische Gleichung:

$$2a_{32}^2(2\beta^2 + \alpha^2) + 4a_{32}n\beta\delta a_{34} = 2^s - n\alpha^2 a_{34}^2 - n^2\delta^2 a_{34}^2.$$

Eine analoge quadratische Gleichung erhalten wir für die Grösse a_{42}. Die Gleichungen lassen sich in besonders einfacher Weise auflösen, wenn wir setzen:

$$q = s, \quad t = s - 1, \quad a_{34} = \alpha, \quad a_{44} = -\beta.$$

Wir erhalten demgemäss den

Lehrsatz: Leistet die Zahl n der Gleichung Genüge:

$$n(\alpha^2 + 2\beta^2) = 2^s - \delta^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1, \quad \mu_4 = n, \quad m_1 = 2^s . n, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 2^s, \quad m_4 = 2^{s-1},$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cccc} n\alpha, & n\beta, & n\beta, & \delta, \\ 0, & 1, & -1, & 0, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{32}, & \alpha, \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{42}, & -\beta, \end{array}$$

$$a_{31} = -\frac{\delta\alpha^2 \pm 2\beta^2 2^{\frac{s}{2}}}{\alpha^2 + 2\beta^2}, \quad a_{32} = \alpha\beta\frac{-\delta \pm 2^{\frac{s}{2}}}{\alpha^2 + 2\beta^2},$$

$$a_{41} = -\alpha\beta\frac{-\delta \pm 2^{\frac{s}{2}}}{\alpha^2 + 2\beta^2}, \quad a_{42} = \frac{2\beta^2\delta \pm 2^{\frac{s}{2}}\alpha^2}{2(\alpha^2 + 2\beta^2)}.$$

Damit wollen wir die Additionstheoreme zwischen Producten von vier Factoren einstweilen abschliessen.

§ 10.

Entwickelung von Additionstheoremen zwischen Producten von je sechs und acht Factoren.

Noch kürzer wollen wir in dem Falle verfahren, dass die Zahl der Factoren in den einzelnen Producten gleich sechs oder acht ist. Nehmen wir an, dass eine Zahl n sich als die Summe von sechs Quadraten darstellen lässt:

$$n = \sum_1^6 a_r^2,$$

so wird es im Allgemeinen nicht möglich sein, Additionstheoreme zu bilden, bei welchen die Zahlen μ sämmtlich gleich 1, die Zahlen m sämmtlich gleich n sind, während die Transformationszahlen $a_{\varepsilon r}$ vom Zeichen abgesehen gleich den Zahlen a_r sind, wohl aber ist es der Fall, wenn die Grössen a gewissen Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Einen solchen Fall greifen wir heraus.

Nehmen wir das Schema:

$$\begin{array}{cccccc}
a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, \\
a_2, & -a_1, & a_4, & -a_3, & a_6, & -a_5, \\
a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_1, & a_2, \\
a_4, & -a_3, & a_6, & -a_5, & a_2, & -a_1, \\
a_5, & a_6, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4. \\
a_6, & -a_5, & a_2, & -a_1, & a_4, & -a_3,
\end{array}$$

und bezeichnen es kurz durch S, so wird zu ihm ein Additionstheorem gehören, wenn die Zahlen a den beiden Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$1)\qquad \begin{cases} a_1(a_3+a_5)+a_2(a_4+a_6)+a_3a_5+a_4a_6=0, \\ a_1(a_4-a_6)+a_2(a_5-a_3)+a_3a_6-a_4a_5=0. \end{cases}$$

Wir finden also den

Lehrsatz: Leistet eine Zahl n der Gleichung Genüge:

$$n=\sum_1^6 a_r^2,$$

während zwischen den Grössen a_r die Bedingungsgleichungen 1) bestehen, so gehört zu dem Schema S das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon,\tau)=\sum\prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau) \quad \varepsilon=1,2,\dots 6.$$

Es stellt dieses Additionstheorem in speciellen Fällen eine Multiplicatorbeziehung dar, welche zu dem Transformationsgrad n gehört.

Aus den Gleichungen 1) können die sechs Grössen a_r durch vier geeignet gewählte dargestellt werden.

Wir begnügen uns mit den folgenden Bemerkungen. Aus den Gleichungen ergeben sich für a_1 und a_2 die Werthe:

$$Na_1=a_3(a_6^2-a_5^2)+a_5(a_3^2-a_4^2)+2a_4a_6(a_3-a_5),$$
$$Na_2=a_4(a_5^2-a_6^2)+a_6(a_4^2-a_3^2)+2a_3a_5(a_4-a_6),$$
$$N=a_5^2+a_6^2-a_3^2-a_4^2.$$

Es müssen also die vier Zahlen a_3, a_4, a_5, a_6 so gewählt werden, dass die linken Seiten durch N theilbar sind. Es geschieht das zum Beispiel, wenn die Zahlen a_3, a_4, a_5, a_6 der Gleichung Genüge leisten:

$$a_5^2+a_6^2-a_3^2-a_4^2=\pm 1.$$

Setzen wir z. B.:

$$n = 365,$$

so würde sich ein Additionstheorem ergeben, welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} 10, & -16, & 2, & 0, & 1, & 2, \\ -16, & -10, & 0, & -2, & 2, & -1, \\ 2, & 0, & 1, & 2, & 10, & -16, \\ 0, & -2, & 2, & -1, & 16, & -10, \\ 1, & 2, & 10, & -16, & 2, & 0, \\ 2, & -1, & -16, & -10, & 0, & -2. \end{matrix}$$

Ein weiterer specieller Fall ist enthalten in dem

Lehrsatz: Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = \frac{\alpha^2 + 9\beta^2}{2},$$

so existirt ein Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau),$$

welches zu dem Schema S gehört, vorausgesetzt, dass gesetzt wird:

$$a_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad a_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad a_3 = a_5 = \beta, \quad a_4 = a_6 = -\beta.$$

Für den Fall von acht Factoren möge zunächst ein Additionstheorem herausgegriffen werden, auf welches mich Herr College Rohn aufmerksam machte. Wir nehmen dazu an, dass die Zahlen μ sämmtlich gleich 1, die Zahlen m sämmtlich gleich n sind, so muss n sich als Summe von acht Quadratzahlen darstellen lassen. Die entsprechenden Zahlen lassen sich dann unter Zuhülfenahme des negativen Vorzeichens so permutiren, dass allen Bedingungsgleichungen Genüge geleistet werden kann. Wir wollen sie durch $a_1, a_2, \dots a_8$ bezeichnen und mit ihrer Hülfe die Schemata bilden:

$$A_1 = \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \\ a_2, & -a_1, & -a_4, & a_3, \\ a_3, & a_4, & -a_1, & -a_2, \\ a_4, & -a_3, & a_2, & -a_1 \end{matrix} \qquad A_2 = \begin{matrix} -a_1, & -a_2, & a_3, & a_4, \\ a_2, & -a_1, & -a_4, & a_3, \\ -a_3, & a_4, & -a_1, & a_2, \\ -a_4, & -a_3, & -a_2, & -a_1, \end{matrix}$$

$$B_1 = \begin{matrix} a_5, & a_6, & a_7, & a_8, \\ -a_6, & a_5, & a_8, & -a_7, \\ a_7, & a_8, & -a_5, & -a_6, \\ a_8, & -a_7, & a_6, & -a_5, \end{matrix} \qquad B_2 = \begin{matrix} a_5. & a_6, & -a_7, & -a_8, \\ a_6, & -a_5, & -a_8, & a_7, \\ a_7, & -a_8, & a_5, & -a_6, \\ a_8, & a_7, & a_6, & a_5. \end{matrix}$$

Es gilt dann der folgende

Lehrsatz: Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = \sum_1^8 a_r^2,$$

— was stets möglich ist —, so gilt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, n\tau) \quad \varepsilon = 1, 2, \ldots 8,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, \\ B_2, & A_2. \end{matrix}$$

In analoger Weise ergeben sich die folgenden drei Sätze:

Lehrsatz: Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_5^2 + 2a_6^2 + 2a_7^2 + 2a_8^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_3](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 2,$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = n, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2n,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, \\ 2B_2, & A_2. \end{matrix}$$

Lehrsatz: Leistet eine Zahl n der Gleichung Genüge:

$$n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = 2^r - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2 - a_8^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = n,$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2^r.n, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2^r,$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} nA_1, & B_1, \\ B_2, & A_2. \end{matrix}$$

Lehrsatz: Leistet eine Zahl n der Gleichung Genüge:

$$n(a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + 2a_4^2) = 2^r - a_5^2 - 2a_6^2 - a_7^2 - 2a_8^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\prod \vartheta_3(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3[g_\varepsilon](w_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

$$\mu_1 = \mu_3 = 1, \quad \mu_2 = \mu_4 = 2, \quad \mu_5 = \mu_7 = n, \quad \mu_6 = \mu_8 = 2n,$$

$$m_1 = m_3 = 2^r . n, \quad m_2 = m_4 = 2^{r+1} . n, \quad m_5 = m_7 = 2^r, \quad m_6 = m_8 = 2^{r+1},$$

welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cccccccc}
na_1, & na_2, & na_3, & na_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, \\
2na_2, & -na_1, & -2na_4, & na_3, & -2a_6, & a_5, & 2a_8, & -a_7, \\
na_3, & na_2, & -na_1, & -na_2, & a_7, & a_8, & -a_5, & -a_6, \\
2na_4, & -na_3, & 2na_2, & -na_1, & 2a_8, & -a_7, & 2a_6, & -a_5, \\
a_5, & a_6, & -a_7, & -a_8, & -a_1, & -a_2, & a_3, & a_4, \\
2a_6, & -a_5, & -2a_8, & a_7, & 2a_2, & -a_1, & -2a_4, & a_3, \\
a_7, & -a_8, & a_5, & -a_6, & -a_3, & a_4, & -a_1, & a_2, \\
2a_8, & a_7, & 2a_6, & a_5, & -2a_4, & -a_3, & -2a_2, & -a_1.
\end{array}$$

Diese Additionstheoreme zwischen Producten von acht Factoren mögen genügen. Zu bemerken ist, dass die beiden ersten zu Multiplicator-, die beiden letzten zu Modularbeziehungen führen.

§ 11.

Zusammensetzung von Transformationen.

Mehrere der in den vorigen Paragraphen gebildeten Additionstheoreme können als Beispiele gewisser Sätze dienen, mit deren Hülfe aus speciellen Additionstheoremen allgemeinere hergeleitet werden können. Zu der Ableitung derartiger Sätze wenden wir uns.

Wir nehmen dazu an, dass das Symbol:

$$A = \begin{array}{l} a_{11}, \; a_{12}, \ldots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}, \; a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{array}$$

ein Additionstheorem definirt, bei welchem die einzelnen Producte aus n Factoren bestehen, bei welchem ferner links die Zahlen μ_ε, rechts die Zahlen m_ε, vorkommen; wir nehmen zweitens an, dass das Symbol:

$$B = \begin{array}{l} b_{11}, \; b_{12}, \ldots b_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1}, \; b_{n2}, \ldots b_{nn} \end{array}$$

ein analoges Additionstheorem zwischen Producten von n Factoren definirt, bei welchem links die Zahlen μ'_ε, rechts dagegen dieselben Zahlen m_ε vorkommen, dann definirt das Symbol:

$$\begin{array}{cc} A & B \\ A & -B \end{array}$$

ein Additionstheorem zwischen Producten von $2n$ Factoren, bei welchen links die Zahlen μ_ε, μ'_ε, rechts dagegen die Zahlen $2m_\varepsilon$, $2m_\varepsilon$ vorkommen.

Der Beweis ist unmittelbar klar. Durch Specialisirung ergeben sich hieraus eine ganze Reihe von Sätzen. Wir greifen einige heraus. Lässt z. B. eine Zahl n sich in die Formen bringen:

$$n = a_1^2 + a_2^2$$

und:

$$n = b_1^2 + b_2^2,$$

so existiren die beiden Additionstheoreme:

$$\begin{array}{cc|c} \mu_1 = 1, & \mu_2 = 1 & \\ \hline a_1, & a_2 & m_1 = n \\ a_2, & -a_1 & m_2 = n \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cc|c} \mu'_1 = 1, & \mu'_2 = 1 & \\ \hline b_1, & b_2 & m'_1 = n \\ b_2, & -b_1 & m'_2 = n. \end{array}$$

Bezeichnen wir die beiden Schemata durch A und B, so existirt ein Additionstheorem zwischen Producten von je vier Factoren, bei welchem die Zahlen μ links der Einheit gleich sind, die Zahlen m rechts den Werth $2n$ besitzen, welches überdies zu dem Schema gehört:

$$\begin{array}{cc} A, & B, \\ A, & -B. \end{array}$$

Ganz allgemein können wir sagen, es gilt der

Lehrsatz: Lässt eine Zahl n sich in die Formen bringen:

$$n = a_1^2 + a_2^2$$

und:

$$n = b_1^2 + b_2^2,$$

so können mit Hülfe der Schemata A und B Additionstheoreme zwischen Producten von 2^{r+1} Factoren aufgestellt werden, bei welchen die Zahlen μ links den Werth 1, die Zahlen m rechts den Werth $2^r.n$ besitzen.

Lässt sich ferner eine Zahl n in die Formen bringen:

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

und:

$$n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2,$$

so existiren zwei Additionstheoreme, welche den Schemata entsprechen:

$$\begin{array}{cccc|c} \mu_1 = 1, & \mu_2 = 1, & \mu_3 = 1, & \mu_4 = 1 & \\ \hline a_1, & a_2, & a_3, & a_4 & m_1 = n \\ a_2, & -a_1, & -a_4, & a_3 & m_2 = n \\ a_3, & a_4, & -a_1, & -a_2 & m_3 = n \\ a_4, & -a_3, & a_2, & -a_1 & m_4 = n \end{array}$$

und:

$\mu'_1 = 1,$	$\mu'_2 = 1,$	$\mu'_3 = 1,$	$\mu'_4 = 1$	
$b_1,$	$b_2,$	$b_3,$	b_4	$m'_1 = n$
$b_2,$	$-b_1,$	$-b_4,$	b_3	$m'_2 = n$
$b_3,$	$b_4,$	$-b_1,$	$-b_2$	$m'_3 = n$
$b_4,$	$-b_3,$	$b_2,$	$-b_1$	$m'_4 = n.$

Bezeichnen wir die beiden Schemata durch A und B, so existirt ein Additionstheorem zwischen Producten von je acht Factoren, bei welchem die Zahlen μ gleich 1, die Zahlen m gleich $2n$ sind und welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ A, & -B. \end{matrix}$$

Ganz allgemein ergiebt sich der

Lehrsatz: Lässt eine Zahl n sich in die Formen bringen:

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

und:

$$n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2,$$

so können mit Hülfe der Schemata A und B Additionstheoreme zwischen Producten von 2^{r+2} Factoren aufgestellt werden, bei welchen die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts gleich $2^r.n$ sind.

Lässt ferner eine Zahl n sich in die Formen bringen:

$$n = a_1^2 + 2a_2^2$$

und:

$$n = b_1^2 + 2b_2^2,$$

so existiren die beiden Additionstheoreme:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = 2$	
$a_1,$	a_2	$m_1 = n,$
$2a_2,$	$-a_1$	$m_2 = 2n$

und

$\mu'_1 = 1,$	$\mu'_2 = 2$	
$b_1,$	b_2	$m'_1 = n,$
$2b_2,$	$-b_1$	$m'_2 = 2n.$

Bezeichnen wir die beiden Schemata durch A und B, so existirt ein Additionstheorem zwischen Producten von je vier Factoren, bei welchem die Zahlen μ die Werthe 1, 2, 1, 2 besitzen, dagegen die Zahlen m rechts die Werthe $n, 2n, n, 2n$ und welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} A & B \\ A & -B. \end{matrix}$$

Ganz allgemein ergiebt sich der

Lehrsatz: Lässt eine Zahl n sich in die Formen bringen:

$$n = a_1^2 + 2a_2^2,$$
$$n = b_1^2 + 2b_2^2,$$

so können mit Hülfe der Schemata A und B Additionstheoreme zwischen Producten von 2^{r+1} Factoren hergestellt werden, bei welchen die Zahlen μ abwechselnd die Werthe 1 und 2, die Zahlen m abwechselnd die Werthe $2^r.n$ und $2^{r+1}.n$ annehmen.

Endlich nehmen wir noch den folgenden Fall.

Leistet eine Zahl n den beiden Gleichungen Genüge:

$$2^s = a_1^2 + na_2^2,$$
$$2^s = b_1^2 + nb_2^2,$$

so gelten die beiden Additionstheoreme:

$\mu_1 = 1,$	$\mu_2 = n$	
$a_1,$	a_2	2^s
$na_2,$	$-a_1$	$2^s.n$

und

$\mu'_1 = 1,$	$\mu'_2 = n$	
$b_1,$	b_2	2^s
$nb_2,$	$-b_1$	$2^s.n$

Bezeichnen wir die beiden Schemata durch A und B, so existirt ein Additionstheorem zwischen Producten von je vier Factoren, bei welchem die Zahlen μ die Werthe $1, n, 1, n$ die Zahlen m die Werthe $2^{s+1}, 2^{s+1}.n, 2^{s+1}, 2^{s+1}.n$ besitzen und welches zu dem Schema gehört:

$$\begin{matrix} A, & B \\ A, & -B. \end{matrix}$$

Ganz allgemein gilt der

Lehrsatz: Leistet eine Zahl n den beiden Gleichungen Genüge:

$$2^s = a_1^2 + na_2^2,$$
$$2^s = b_1^2 + nb_2^2,$$

so können mit Hülfe der Schemata A und B Additionstheoreme zwischen Producten von 2^{r+1} Factoren hergestellt werden, bei welchen die Zahlen μ abwechselnd die Werthe 1 und n, die Zahlen m abwechselnd die Werthe 2^{s+r} und $2^{s+r}.n$ annehmen.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Bedeutung des allgemeinen Theorems am Anfange dieses Paragraphen klarzulegen.

In ähnlicher Weise kann ein zweiter allgemeiner Lehrsatz aufgestellt werden. Wir setzen dazu analog wie vorhin:

$$A = \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots & a_{1n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots & a_{nn}, \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, \ldots & b_{1n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}, & b_{n2}, \ldots & b_{nn} \end{matrix}$$

und nehmen ferner an, dass die Zahlen μ, die zu den beiden Schemata gehören, die nämlichen Werthe besitzen, während die Zahlen m bei dem ersten Schema die Werthe $m_1, m_2, \ldots m_n$, bei dem zweiten die Werthe $m'_1, m'_2, \ldots m'_n$ besitzen sollen. Leisten dann die Transformationszahlen den weiteren Gleichungen Genüge:

$$\mu_1(a_{s1}b_{r1} - a_{r1}b_{s1}) + \mu_2(a_{s2}b_{r2} - a_{r2}b_{s2}) + \cdots \mu_n(a_{sn}b_{rn} - a_{rn}b_{sn}) = 0,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A & B \\ B & -A, \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ die Werthe haben:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \quad \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n,$$

die Zahlen m dagegen resp. gleich sind:

$$m_1 + m'_1, \quad m_2 + m'_2, \ldots m_n + m'_n, \; m_1 + m'_1, \ldots m_n + m'_n.$$

Auch dieser Satz lässt reiche Anwendungen zu. Wir greifen einige heraus.

Ist $n = 4\alpha^2$, so gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ gleich 1, die Zahlen m gleich $4\alpha^2$ sind. Ferner gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ wiederum gleich 1, die Zahlen m dagegen gleich β^2 sind. Bezeichnen wir die beiden Schemata durch A und B, so gilt der

Lehrsatz: Lässt eine ganze Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = 4\alpha^2 + \beta^2,$$

so existirt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A & B \\ B & -A, \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts gleich n sind.

Ferner existirt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \gamma & \beta & \alpha \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts gleich:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

sind. Ferner gilt genau wie vorhin das Theorem:

$$\begin{matrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta. \end{matrix}$$

Da die Bedingungen des allgemeinen Theorems erfüllt sind, so ergiebt sich, wenn wir die beiden Schemata noch durch A und B bezeichnen, der

Lehrsatz: Lässt eine Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B \\ B, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts gleich n sind.

Endlich betrachten wir das Theorem:

$$\begin{matrix} \alpha, & \alpha, & \alpha, & \alpha, \\ \alpha, & -\alpha, & \alpha, & -\alpha, \\ \alpha, & \alpha, & -\alpha, & -\alpha, \\ \alpha, & -\alpha, & -\alpha, & \alpha \end{matrix}$$

mit den Zahlen $\mu = 1$, $m = 4\alpha^2$ und das Theorem:

$$\begin{matrix} \beta, & \gamma, & 0, & 0, \\ -\gamma, & \beta, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & \beta, & \gamma, \\ 0, & 0, & -\gamma, & \beta \end{matrix}$$

mit den Zahlen μ gleich 1, m gleich $\beta^2 + \gamma^2$. Auch hier sind alle Bedingungen erfüllt. Bezeichnen wir die Schemata durch A und B, so gilt der

Lehrsatz: Lässt eine Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = 4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ B, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ links gleich 1, die Zahlen m rechts gleich n sind.

Wir können den Lehrsatz, für welchen soeben Beispiele gebracht worden sind, noch verallgemeinern.

Unter denselben Bedingungen für die Zahlen a_{sr}, b_{sr} wie vorhin gilt nämlich das Theorem:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ \mu B, & -A, \end{matrix}$$

wobei die Zahlen links die Werthe haben:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \quad \mu\mu_1, \mu\mu_2, \ldots \mu\mu_n,$$

die Zahlen rechts dagegen:

$$m_1 + \mu m'_1, \ m_2 + \mu m'_2, \ldots m_n + \mu m'_n, \quad \mu(m_1 + \mu m'_1), \ldots \mu(m_n + \mu m'_n).$$

Wir wollen auch für diesen Satz einige Anwendungen geben und zwar analog wie bei dem vorhergehenden.

Setzen wir:

$$A = \begin{matrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{matrix}$$

und nehmen an, dass n sich in die Form bringen lässt:

$$n = 4\alpha^2 + 2\beta^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ 2B, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ und m die Werthe besitzen:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 2,$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = n, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2n.$$

Unter der Voraussetzung ferner, dass n der Gleichung Genüge leistet:

$$2^r = 4\alpha^2 + n\beta^2$$

gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ nB, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem A und B die vorigen Schemata bedeuten und die Grössen μ und m die Werthe haben:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = n,$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2^r, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2^r . n.$$

Setzen wir ferner:

$$A = \begin{matrix} \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \gamma & \beta & \alpha \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{matrix}$$

und nehmen an, dass n sich in die Form bringen lässt:

$$n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\delta^2,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ 2B, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ und m die Werthe besitzen:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 2,$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = n, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2n.$$

Unter der Voraussetzung ferner, dass n der Gleichung Genüge leistet:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + n\delta^2 = 2^r,$$

gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B \\ nB, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem A und B die vorigen Schemata bedeuten und die Grössen μ und m die Werthe haben:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = n,$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2^r, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2^r . n.$$

Endlich setzen wir:

$$A = \begin{matrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & \alpha \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & \beta \end{matrix}$$

und nehmen an, dass n sich in die Form bringen lässt:

$$n = 4\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2,$$

dann gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ 2B, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem die Zahlen μ und m die Werthe besitzen:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,$$
$$\mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 2,$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = n,$$
$$m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2n.$$

Unter der Voraussetzung ferner, dass n der Gleichung Genüge leistet:

$$2^r = 4\alpha^2 + n\beta^2 + n\gamma^2,$$

gilt das Additionstheorem:

$$\begin{matrix} A, & B, \\ nB, & -A, \end{matrix}$$

bei welchem A und B die vorigen Schemata bedeuten und die Grössen μ und m die Werthe haben:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,$$
$$\mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = n,$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2^r,$$
$$m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 2^r . n.$$

Diese Beispiele mögen genügen. Ein weiterer Satz kann in der folgenden Weise entwickelt werden.

Es definire:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

ein Additionstheorem mit den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ links, $m_1, m_2, \dots m_n$ rechts, ferner definire:

$$B = \begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & \dots & b_{1\nu} \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots & b_{2\nu} \\ b_{\nu 1}, & b_{\nu 2}, & \dots & b_{\nu\nu} \end{matrix}$$

ein Additionstheorem mit den Zahlen $\mu'_1, \mu'_2, \dots \mu'_\nu$ links, $m'_1, m'_2, \dots m'_\nu$ rechts, wobei $m_1 = m'_1$ sein soll, dann besteht auch das Additionstheorem:

$$\begin{array}{cccc}
a_{11},\dots & a_{1n}, & b_{11},\dots & b_{1\nu}, \\
a_{11},\dots & a_{1n}, & -b_{11},\dots & -b_{1\nu}, \\
a_{21},\dots & a_{2n}, & 0,\dots & 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{n1},\dots & a_{nn}, & 0,\dots & 0, \\
0,\dots & 0, & b_{21},\dots & b_{2\nu}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0,\dots & 0, & b_{\nu},\dots & b_{\nu\nu},
\end{array}$$

mit den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n, \mu'_1, \dots \mu'_\nu$ links und den Zahlen:

$$2m_1, 2m_1, m_2, \dots m_n, \quad m'_2, \dots m'_\nu$$

rechts. Als speciellen Fall für dieses Theorem wählen wir den folgenden.

Es möge gelungen sein, ein Additionstheorem zwischen Producten von n Factoren zu bilden, bei welchem links stets der Modul τ, rechts stets der Modul $m\tau$ steht. Die entsprechenden Transformationszahlen seien die Zahlen $a_{\varepsilon r}$, dann existirt auch ein Additionstheorem, welches dem Schema entspricht:

$$\begin{array}{cccc}
a_{11}\; a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\
a_{11}\; a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 \\
a_{21}\; a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
a_{n1}\; a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0,
\end{array}$$

bei welchem die Zahlen μ die Werthe haben:

$$\mu_1 = \mu_2 \cdots = \mu_n = 1, \quad \mu_{n+1} = m,$$

die Zahlen m dagegen resp. gleich sind:

$$m_1 = m_2 = 2m, \quad m_3 = m_4 \cdots m_{n+1} = m.$$

Zum Schluss möge noch der folgende Satz hervorgehoben werden.

Es sei ein Schema von n^2 Zahlen vorgelegt $a_{\varepsilon r}$ und ein Schema von n^2 Zahlen $b_{\varepsilon r}$, das erste bezeichnen wir durch A, das zweite durch B. Die Transformationszahlen mögen den Bedingungen Genüge leisten:

$$\begin{gathered}
\mu_1 a_{\varepsilon 1}^2 + \mu_2 a_{\varepsilon 2}^2 \quad + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n}^2 = m_\varepsilon, \\
\mu_1 b_{\varepsilon 1}^2 + \mu_2 b_{\varepsilon 2}^2 \quad + \cdots \mu_n b_{\varepsilon n}^2 = m'_\varepsilon, \\
\mu_1 a_{\varepsilon 1} b_{r1} + \mu_2 a_{\varepsilon 2} b_{r2} + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n} b_{rn} = 0, \\
\mu_1 (a_{\varepsilon 1} a_{s1} + b_{\varepsilon 1} b_{s1}) \quad + \cdots \mu_n (a_{\varepsilon n} a_{sn} + b_{\varepsilon n} b_{sn}) = 0, \\
\varepsilon = 1, \dots n, \quad r = 1, \dots n, \quad s = 1, \dots n, \quad s \lesseqgtr \varepsilon, \quad r \lesseqgtr \varepsilon,
\end{gathered}$$

so gehört zu dem Schema von ϱ^2 Grössen:

$$\begin{array}{cccccc} A & B & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & A & B & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & A & B & 0 \ldots 0 \\ . & . & . & . & . \;.\;.\;. \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots A \end{array}$$

ein Additionstheorem, bei welchem die einzelnen Producte aus ϱn Grössen bestehen, die Zahlen μ gleich sind:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \quad \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots,$$

die Zahlen m die Werthe besitzen:

$$m_1 + m'_1, \quad m_2 + m'_2, \ldots m_n + m'_n, \quad m_1 + m'_1, \ldots m_n + m'_n, \text{ etc.}$$

Dieser Satz lässt wiederum reiche Anwendungen zu.

Nehmen wir an, dass der Transformationsgrad m sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt:

$$n = \alpha^2 + \beta^2,$$

so können wir setzen:

$$A = \begin{array}{cc} \alpha & \beta, \\ \alpha & \beta, \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \beta & -\alpha, \\ -\beta & \alpha, \end{array}$$

wobei die Zahlen μ gleich 1, die Zahlen m und m' gleich n sind. Mit Hülfe dieser Schemata erhalten wir eine unendliche Fülle von Additionstheoremen, die wir zu dem Grade $2n$ gehörig ansehen können. Wir greifen die beiden Transformationen heraus:

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta & -\beta & \alpha \\ \beta & -\alpha & \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha & \alpha & \beta \end{array}$$

und:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -\alpha & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \alpha & \beta & 0 & 0. \end{array}$$

Ganz allgemein gilt der

Lehrsatz: Lässt eine gerade Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = 2(\alpha^2 + \beta^2),$$

so können unendlich viele dazu gehörende Additionstheoreme aufgestellt werden, bei welchen die Zahl der Factoren der einzelnen Producte gleich 2ϱ ist, bei denen ferner die

Zahlen μ gleich 1, die Zahlen m gleich n sind. ϱ kann jede ganze positive Zahl bedeuten.

Setzen wir ferner:

$$A = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & -\delta & -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta & -\alpha & \beta \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \beta & -\alpha & \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ \delta & \gamma & -\beta & -\alpha \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{matrix}$$

so gilt der

Lehrsatz: Lässt eine gerade Zahl n sich in die Form bringen:

$$n = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2),$$

so können mit Hülfe der Schemata A und B unendlich viele Additionstheoreme aufgestellt werden, bei welchen die Zahl der Factoren der einzelnen Producte gleich 4ϱ ist, bei denen ferner die Zahlen μ gleich 1, die Zahlen m gleich n sind.

Zweiter Abschnitt.

Die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen in trigonometrische Reihen.

§ 12.[3])

Zusammenstellung einiger fundamentaler Sätze über doppeltperiodische Function.

Im ersten Bande dieses Werkes sind die verschiedenen Arten von doppeltperiodischen Functionen definirt und eine Anzahl von Sätzen über dieselben entwickelt worden. Wir wollen einige derselben, die für die folgende Theorie der Entwickelung in trigonometrische Reihen von besonderer Bedeutung sind, hier nochmals aufstellen.

Unter einer doppeltperiodischen Function dritter Art mit den Perioden 1 und τ verstehen wir eine eindeutige Function der complexen Veränderlichen v, welche den Gleichungen genügt:

1) $$f(v+1) = e^{av+b} \,.\, f(v),$$

2) $$f(v+\tau) = e^{a_1 v + b_1} .\, f(v).$$

Die beiden Grössen a und a_1 sind nicht ganz willkürlich gegeben, leisten vielmehr der Gleichung Genüge:

3) $$a_1 = a\tau + 2n\pi i,$$

wobei n irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Die Definitionsgleichungen können in mannigfache Formen gebracht werden. Unter ihnen greifen wir die folgenden heraus.

Führt man statt der Function $f(v)$ die neue Function:

$$F(v) = e^{-\frac{1}{2}\left(av^2 + (2b-a)v\right)} f(v)$$

ein, so genügt diese den Bedingungsgleichungen:

4) $$F(v+1) = F(v),$$

5) $$F(v+\tau) = e^{2n\pi i v + 2\pi i\lambda} .\, F(v),$$

wobei zur Abkürzung:

$$2\pi i\lambda = b_1 - b\tau + \frac{a\tau}{2}(1-\tau)$$

gesetzt ist. Ist $n = 0$, so ist die dazu gehörige Function $F(v)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Art.

Ist n von Null verschieden, und setzen wir:

$$\varphi(v) = F\left(v - \frac{\lambda}{n}\right),$$

so leistet $\varphi(v)$ den Gleichungen Genüge:

$$6)\qquad \varphi(v+1) = \varphi(v),$$

$$7)\qquad \varphi(v+\tau) = e^{2n\pi i v}\varphi(v).$$

Ist n gleich Null, überdies λ auch gleich Null, so werden diese speciellen doppeltperiodischen Functionen mit dem Namen der doppeltperiodischen Functionen erster Art bezeichnet.

Diese doppeltperiodischen Functionen lassen sich nun als Summe gewisser einfacherer Functionen darstellen. Nimmt man zunächst die Unendlichkeitspunkte alle von einander verschieden an, so bestehen die folgenden Sätze:

I. Die doppeltperiodischen Functionen dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitspunkte, lassen sich linear aus Functionen von der Form zusammensetzen:

$$\frac{\vartheta_3[g](nv - b_1, n\tau)}{\vartheta_3(v - b, \tau)},$$

wobei $n-1$ gleich der Differenz der Zahl der Null und Unendlichkeitsstellen ist und die letzteren alle von einander verschieden angenommen sind.

Als specieller Fall ergiebt sich:

II. Die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art mit lauter verschiedenen Unendlichkeitspunkten lassen sich linear aus den Functionen:

$$\frac{\vartheta_1(v - b_1)}{\vartheta_1(v - b)}$$

zusammensetzen.

Ferner fanden wir das Resultat:

III. Die doppeltperiodischen Functionen dritter Art, bei denen n Unendlichkeitspunkte mehr als Nullpunkte vorhanden und die Unendlichkeitspunkte von einander verschieden sind, lassen sich linear durch die Grössen darstellen:

$$\frac{\vartheta_3(v - a, \tau)}{\vartheta_3(v - b, \tau)}\ \frac{1}{\vartheta_\alpha(nv, n\tau)}.$$

Im Falle der Functionen erster Art modificiren sich die Resultate. Wir fanden:

IV. Die doppeltperiodischen Functionen erster Art mit lauter von einander verschiedenen Unendlichkeitspunkten lassen sich linear aus den Grössen zusammensetzen:
$$\frac{\vartheta'_1(v-b)}{\vartheta_1(v-b)}.$$

Die Coefficienten sind bei all diesen Darstellungen vollkommen bestimmt worden.

Treten mehrfache Unendlichkeitspunkte auf, so müssen die Differentialquotienten der angegebenen Functionen nach gewissen Grössen hinzugenommen werden. Wir wollen der Einfachheit halber zunächst immer annehmen, dass die Unendlichkeitspunkte sämmtlich von einander verschieden sind. Der entgegengesetzte Fall wird später behandelt werden.

Das Problem, die allgemeinen doppeltperiodischen Functionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln, ist dann darauf zurückgeführt, die in den aufgestellten vier Sätzen enthaltenen Primfunctionen in solche Reihen zu entwickeln. Mit diesem Problem wollen wir uns zunächst in ausführlicher Weise beschäftigen und zwar behandeln wir zunächst den Fall, dass die Zahl der Nullpunkte grösser oder gleich der Zahl der Unendlichkeitspunkte ist.

§ 13.

Darstellung aller ganzen transcendenten doppeltperiodischen Functionen dritter Art durch trigonometrische Reihen ohne Kenntniss ihrer Nullwerthe.

In § 81 des ersten Buches ist eine Methode angegeben worden, wie die ganzen transcendenten doppeltperiodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen entwickelt werden können, wenn ihre Nullpunkte bekannt sind. Es kann das genannte Problem aber auch ohne Kenntniss ihrer Nullpunkte gelöst werden und zwar in der folgenden Weise. Wir legen als Bedingungsgleichungen vier verschiedene Formen zu Grunde. Zuerst mögen die Gleichungen bestehen:

$$1)\qquad \begin{cases} f(v+1)=f(v), \\ f(v+1)=e^{-\pi i n(2v+2a+\tau)}f(v), \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, so folgt nach unseren früheren Erörterungen:

$$2)\qquad f(v)=\sum c_r\,.\,e^{-2\pi i r\tau}\,.\,\vartheta_3(nv+na-r\tau,\,n\tau).$$

Die Grössen c_r sind unbekannte Grössen. Um sie zu bestimmen, setzen wir an Stelle von v der Reihe nach:

$$v, \; v + \frac{1}{n}, \; v + \frac{2}{n}, \cdots v + \frac{n-1}{n},$$

dann folgt durch Addition aller entsprechenden Gleichungen unmittelbar:

$$n c_0 \vartheta_3(nv + na, n\tau) = \sum_0^{n-1} f\left(v + \frac{r}{n}\right)$$

oder indem wir etwa $v = 0$ setzen:

$$3) \qquad n c_0 \vartheta_3(na, n\tau) = \sum f\left(\frac{r}{n}\right).$$

Damit ist die eine Constante c_0 bestimmt. Ganz analog können die übrigen gefunden werden. Setzen wir:

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

so ergiebt sich:

$$4) \qquad n c_s \vartheta_3(na - s\tau, n\tau) = \sum \alpha^{rs} . f\left(\frac{r}{n}\right).$$

Ganz analog gestaltet sich die Darstellung, wenn wir die Bedingungsgleichungen wählen:

$$5) \qquad \begin{cases} f(v+1) = f(v), \\ f(v+\tau) = -e^{-\pi i n(2v+2a+\tau)} f(v), \end{cases}$$

wir erhalten nämlich die Form:

$$6) \qquad f(v) = \sum c_r . e^{-2\pi i r v} . \vartheta_0(nv + na - r\tau, n\tau).$$

Die Bestimmung der Constanten folgt wie vorhin.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Function den Gleichungen Genüge leistet:

$$7) \qquad \begin{cases} f(v+1) = -f(v), \\ f(v+\tau) = \pm e^{-\pi i n(2v+2a+\tau)} . f(v). \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst das obere Zeichen und wählen n als ungerade Zahl, so wird:

$$8) \qquad f(v) = \sum c_r . e^{-2\pi i r v} . \vartheta_2(nv + na - r\tau, n\tau).$$

Wir setzen jetzt an Stelle von v der Reihe nach:

$$v, \; v + \frac{2}{n}, \cdots \; v + \frac{2(n-1)}{n},$$

dann wird zunächst:

$$9) \qquad n c_0 \vartheta_2(na, n\tau) = \sum f\left(\frac{2r}{n}\right),$$

überdies allgemein:

$$10) \qquad n c_s \vartheta_2(na - s\tau, n\tau) = \sum \alpha^{2sr} . f\left(\frac{2r}{n}\right).$$

Die Summen sind nach r von 0 bis $n-1$ zu nehmen. Damit ist dieser Fall erledigt. Analog gestaltet sich die Sache für das untere Zeichen. Wir haben für dasselbe zu setzen:

$$11) \qquad f(v) = \sum c_r \,.\, e^{-2\pi i r v} \,.\, \vartheta_1(nv + na - r\tau, n\tau).$$

Jetzt sei n eine gerade Zahl, dann setzen wir im Fall des oberen Zeichens:

$$12) \qquad f(v) = \sum c_{2r-1} \,.\, e^{-\pi i(2r-1)v} \,.\, \vartheta_3\left(nv + na - \frac{2r-1}{2}\tau, n\tau\right).$$

Die rechte Seite schreiben wir:

$$c_1 \,.\, e^{-\pi i v} \,.\, \vartheta_3\left(nv + na - \frac{\tau}{2}, n\tau\right)$$
$$+ c_{n+1} \,.\, e^{-\pi i(n+1)v} \,.\, \vartheta_3\left(nv + na - (n+1)\frac{\tau}{2}, n\tau\right)$$
$$+ c_3 \,.\, e^{-3\pi i v} \,.\, \vartheta_3\left(nv + na - \frac{3\tau}{2}, n\tau\right)$$
$$+ c_{n+3} \,.\, e^{-\pi i(n+3)v} \,.\, \vartheta_3\left(nv + na - (n+3)\frac{\tau}{2}, n\tau\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Wir setzen jetzt an Stelle von v der Reihe nach:

$$v, \quad v + \frac{2}{n}, \quad v + \frac{4}{n}, \cdots v + \frac{2(n-1)}{n},$$

multipliciren die Gleichungen der Reihe nach mit:

$$1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \dots \alpha^{n-1}$$

und addiren, so ergiebt sich:

$$\left\{\begin{aligned} & n\Big[c_1 \,.\, e^{-\pi i v} \,.\, \vartheta_3\left(nv + na - \frac{\tau}{2}, n\tau\right) \\ & + c_{n+1} \,.\, e^{-\pi i(n+1)v} \,.\, \vartheta_3\left(nv + na - (n+1)\frac{\tau}{2}, n\tau\right)\Big] = \sum_0^{n-1} \alpha^r \,.\, f\left(v + \frac{2r}{n}\right)\end{aligned}\right.$$

oder also indem wir etwa $v = 0$ setzen:

$$13) \qquad \left\{\begin{aligned} & n\Big[c_1 \vartheta_3\left(na - \frac{\tau}{2}, n\tau\right) \\ & + c_{n+1} \vartheta_3\left(na - (n+1)\frac{\tau}{2}, n\tau\right)\Big] = \sum_0^{n-1} \alpha^r \,.\, f\left(\frac{2r}{n}\right).\end{aligned}\right.$$

Setzen wir überdies in der vorletzten Gleichung an Stelle von $v : v + \frac{1}{n}$ und dann $v = 0$, so erhalten wir die weitere Gleichung:

$$14) \qquad \left\{\begin{aligned} & n\Big[c_1 \vartheta_3\left(na - \frac{\tau}{2}, n\tau\right) \\ & - c_{n+1} \vartheta_3\left(na - (n+1)\frac{\tau}{2}, n\tau\right)\Big] = e^{\frac{\pi i}{n}} \sum \alpha^r \,.\, f\left(\frac{2r+1}{n}\right).\end{aligned}\right.$$

Diese beiden Gleichungen ergeben dann die Bestimmung der beiden Constanten c_1 und c_{n+1}. Genau so können die übrigen Constanten berechnet werden.

Im letzten Falle endlich haben wir zu setzen:

$$15)\quad f(v) = \sum c_{2r-1} \cdot e^{-\pi i(2r-1)v} \cdot \vartheta_0\left[nv + na - \left(\frac{2r-1}{2}\right)\tau, n\tau\right],$$

wobei dann die Constanten analog wie im vorletzten Fall zu bestimmen sind.

§ 14.

Untersuchung des Falles, dass die Zahl der Nullpunkte grösser oder gleich der Zahl der Unendlichkeitspunkte ist. Einführung der Appell'schen Restfunction und damit zusammenhängender Functionen.

Nachdem der specielle Fall der ganzen transcendenten doppeltperiodischen Functionen betrachtet worden ist, wenden wir uns nunmehr zu dem allgemeinen Falle, dass die Zahl der Nullpunkte grösser oder gleich der Zahl der Unendlichkeitspunkte ist und zwar wollen wir den ersten Fall allein ins Auge fassen. Wir haben gezeigt, dass wir uns dann auf die Functionen beschränken können, die den Gleichungen Genüge leisten:

$$1)\quad \begin{cases} f(v+1) = f(v), \\ f(v+\tau) = e^{-2n\pi i v} f(v), \end{cases}$$

wobei n eine ganze positive Zahl bedeutet, die daneben eine einzige beliebig vorgelegte Unendlichkeitsstelle $v = v_1$ besitzen — abgesehen von Vielfachen von 1 und τ.

Es ist nun nicht schwer, derartige Functionen zu bilden und zwar sind es die Functionen:

$$2)\quad F(v, v_1) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{2\pi i v m n} \cdot q^{mn(m-1)} \cdot e^{2\pi i v_1}}{q^{2m} \cdot e^{2\pi i v} - e^{2\pi i v_1}}.$$

Diese Functionen leisten, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht, allen aufgestellten Bedingungen Genüge — sie sind es, die Halphen, von ganz unwesentlichen Aenderungen abgesehen, in seinem citirten Lehrbuche auf Grund der Appell'schen Arbeiten einer Theorie der Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen zu Grunde legt. Die Aenderung besteht darin, dass in dem Halphen'schen Lehrbuche das Zeichen $(-1)^m$ hinzugenommen wird.

Nun haben unsere Primfunctionen, um deren Entwickelung es sich handelt, die Form:

$$\frac{\vartheta_3|g|(nv - b_2, n\tau)}{\vartheta_3(v - b_1, \tau)}.$$

An Stelle von b_1 wollen wir uns

$$\frac{r}{2} + \frac{s\tau}{2}$$

gesetzt denken, wobei r und s zwei beliebige ganze Zahlen bedeuten, an Stelle von n ferner $n+1$, so können wir, von einem Exponentialfactor abgesehen, der für unsere Theorie ohne Belang ist, unsere Primfunctionen schreiben:

$$\frac{\vartheta_\alpha[(n+1)(v+a), (n+1)\tau]}{\vartheta_\beta(v, \tau)}.$$

Um die Entwickelung um den Unendlichkeitspunkt zu einer besonders einfachen zu gestalten, wollen wir an Stelle der soeben genannten Function die weitere einführen:

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_\alpha[(n+1)(v+a), (n+1)\tau]\,\vartheta'_1}{\vartheta_\beta(v,\tau)\,\vartheta_\gamma[(n+1)a, (n+1)\tau]},$$

wobei γ der Index der Thetafunction ist, welche bei der Entwickelung des Zählers um den Nullpunkt des Nenners als constantes Glied auftritt. Es wird derselbe in den einzelnen Fällen noch ausführlich angegeben werden. Dabei ist die Voraussetzung, dass der Nullpunkt des Nenners $\vartheta_\beta(v,\tau)$ nicht etwa auch ein Nullpunkt des Zählers ist.

Alle diese Functionen von v sind doppeltperiodische Functionen dritter Art mit einem Unendlichkeitspunkte, die gewissen Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Dann folgt aus der allgemeinen Theorie, dass aus der Appell'schen Function weitere Functionen hergeleitet werden können, die denselben Bedingungsgleichungen wie unsere Primfunctionen Genüge leisten und denselben Unendlichkeitspunkt besitzen.

In der That, nehmen wir die Function:

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0[(n+1)(v+a), (n+1)\tau]\,\vartheta'_1}{\vartheta_1(v,\tau)\,\vartheta_0[(n+1)a, (n+1)\tau]},$$

so leistet diese den beiden Gleichungen Genüge:

$$3)\qquad \begin{cases} f(v+1) = -f(v) \\ f(v+\tau) = e^{-\pi i n\left(2v+\frac{2(n+1)}{n}a+\tau\right)} f(v), \end{cases}$$

besitzt überdies den Unendlichkeitspunkt:

$$v = 0.$$

Multipliciren wir nun die Appell'sche Function mit dem Factor:

$$e^{\pi i v},$$

so erhalten wir eine Function von v, die den Gleichungen Genüge leistet:

$$f(v) = -f(v)$$
$$f(v+\tau) = q \cdot e^{-2\pi i n v} \cdot f(v).$$

Um die vorhin genannten Bedingungsgleichungen zu erhalten, haben wir ferner an Stelle von v zu setzen:

$$v + \frac{a(n+1)}{n} + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2n},$$

damit endlich der Unendlichkeitspunkt $v = 0$ herauskommt, muss an Stelle von v_1 gesetzt werden:

$$v_1 = \frac{(n+1)a}{n} + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2n}.$$

Auf diesem Wege gelangen wir, von unwesentlichen Constanten abgesehen, zu der Function:

$$4) \qquad F_{01}(v, a) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{2mni\pi\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)},$$

die den von uns aufgestellten Bedingungsgleichungen Genüge leistet, wobei gesetzt worden ist:

$$5) \qquad w = v + \frac{(n+1)a}{n}.$$

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass in der Wahl der Function $F_{01}(v, a)$ eine gewisse Willkür liegt. Wir können noch unendlich viele andere Functionen derselben Art herstellen. Es geschieht dieses z. B. wenn wir uns an Stelle von w gesetzt denken $w + \frac{l\tau}{n}$ und die auf diese Weise entstandene Function mit $e^{2l\pi iv}$ uns multiplicirt denken. Wir wollen aber zunächst die aufgestellte Function beibehalten.

Die bisherigen Betrachtungen sind völlig einwandsfrei, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet und zwar gelten sie für beliebige Werthe von a, während v von den Werthen:

$$r + s\tau$$

verschieden sein muss.

Ist dagegen $n = 0$, haben wir also den Fall der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art vor uns, so können wir die Appell'sche Function nicht ohne weiteres als Ausgangspunkt nehmen. Wohl aber können wir auch in diesem Falle die Function $F_{01}(v, n)$ unter gewissen Beschränkungen in Betracht ziehen.

Die Richtigkeit der beiden letzten Behauptungen kann leicht in der folgenden Weise bewiesen werden.

Nehmen wir n grösser als Null an und ziehen zunächst nur diejenigen Glieder in Betracht, bei welchen m positiv ist, so ist nach dem Cauchy'schen Kriterium der Quotient zu untersuchen:

$$e^{2\pi in\left(w+\frac{(2m+1)}{2}\tau\right)} \frac{1 - e^{2\pi i(v+m\tau)}}{1 - e^{2\pi i[v+(m+1)\tau]}}.$$

Dieser Ausdruck nähert sich mit wachsendem Werthe von m immer mehr der Null. Das Analoge gilt von den Gliedern, die negativen Werthen von m entsprechen.

Die Schlüsse werden hinfällig, wenn $n = 0$ ist. In diesem Falle lautet das allgemeine Glied:

$$\frac{2ie^{2m\pi ia}}{e^{\pi i(v+m\tau)} - e^{-\pi i(v+m\tau)}}.$$

Man kann im Nenner die erste oder die zweite Exponentialgrösse vernachlässigen, je nachdem m positiv oder negativ unendlich gross wird. Wir erhalten auf diesem Wege die Grössen:

$$-2ie^{2m\pi ia+\pi i(v+m\tau)} \quad \text{und} \quad 2ie^{2m\pi ia-\pi i(v+m\tau)}.$$

Es muss also:

$$|q| < |e^{2\pi ia}| < \left|\frac{1}{q}\right|$$

sein, damit die unendliche Reihe convergent ist.

In ähnlicher Weise wie die Function $F_{01}(v, a)$ können aus der Appell'schen Function fünfzehn weitere Functionen gewonnen werden, die ganz allgemein den Unendlichkeitspunkt

$$v = \frac{r}{2} + \frac{s\tau}{2}$$

besitzen und ähnlichen Bedingungsgleichungen, wie die Function $F_{01}(v, a)$ Genüge leisten. Wir ziehen es aber vor, diese neuen Functionen durch einfache Betrachtungen aus der Function $F_{01}(v, a)$ abzuleiten, und zwar geschieht es, damit die Beziehungen, die zwischen den sechszehn Restfunctionen bestehen, von vorn herein klar hervortreten. Der einfacheren Schreibweise wegen setzen wir hierbei:

$$w_1 = w + \frac{m\tau}{2}.$$

Setzen wir dann an Stelle von v und a resp.

$$v + \frac{1}{2}, \quad a - \frac{1}{2},$$

so erhalten wir die Function:

$$6) \qquad F_{02}(v, a) = \sum (-1)^m \frac{e^{2mni\pi w_1}}{\cos\pi(v + m\tau)},$$

setzen wir ferner in diesen beiden Functionen an Stelle von a:

$$a + \frac{1}{2(n+1)},$$

so erhalten wir:

$$7) \qquad F_{31}(v, a) = \sum (-1)^m \frac{e^{2mni\pi w_1}}{\sin\pi(v + m\tau)},$$

$$8) \qquad F_{32}(v, a) = \sum \frac{e^{2mni\pi w_1}}{\cos\pi(v + m\tau)}.$$

Wir hatten die Beziehung gefunden:

$$F_{01}(v+\tau, a)\, e^{\pi i n (2w+\tau)} = F_{01}(v, a).$$

Bilden wir nun analog wie in der Theorie der gewöhnlichen Thetafunctionen den Ausdruck:

$$F_{01}\left(v+\frac{\tau}{2}, a\right) e^{\frac{\pi i n}{2}\left(2w+\frac{\tau}{2}\right)},$$

so wird derselbe eine neue Function definiren. Wir setzen dieselbe gleich:

9) $$F_{10}(v, a) = \sum \frac{e^{(2m+1)n\pi i w_2}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

wobei unter w_2 die Grösse verstanden werden soll:

10) $$w_2 = v + \frac{(n+1)a}{n} + \frac{2m+1}{4}\tau.$$

Aehnlich folgen aus den Functionen:

$$F_{02}(v, a),\quad F_{31}(v, a),\quad F_{32}(v, a)$$

die weiteren:

11) $$F_{13}(v, a) = \sum \frac{(-1)^m e^{(2m+1)n\pi i w_2}}{\cos\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

12) $$F_{20}(v, a) = \sum \frac{(-1)^m e^{(2m+1)n\pi i w_2}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

13) $$F_{23}(v, a) = \sum \frac{e^{(2m+1)n\pi i w_2}}{\cos\pi\left(v+\frac{2m+1}{2}\tau\right)}.$$

Die Convergenzbedingungen sind bei diesen Functionen die nämlichen geblieben, abgesehen von den Unendlichkeitspunkten, die andere geworden sind.

Vermehren wir endlich a um $\frac{\tau}{2}$, so kommen wir nach Multiplication mit einem geeigneten Factor, auf dessen Bedeutung kaum eingegangen zu werden braucht, zu neuen Functionen. Dieselben definiren wir folgendermaassen:

14) $$\begin{cases} F_{11}(v, a) = e^{\pi i (n+1)\tau} \,.\, F_{01}\left(v, a+\frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i (n+1) v} \sum \frac{e^{2mn\pi i\left(w_1+\frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)}, \end{cases}$$

$$15)\quad \begin{cases} F_{12}(v, a) = e^{\pi i(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \cdot F_{02}\left(v, a + \frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum \frac{(-1)^m e^{2mn\pi i\left(w_1 + \frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\cos\pi(v + m\tau)}, \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} F_{21}(v, a) = e^{\pi i(n+1)v} \cdot F_{31}\left(v, a + \frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i(n+1)v} \sum \frac{(-1)^m e^{2mn\pi i\left(w_1 + \frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\sin\pi(v + m\tau)}, \end{cases}$$

$$17)\quad \begin{cases} F_{22}(v, a) = e^{\pi i(n+1)v} \cdot F_{01}\left(v, a + \frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum \frac{e^{2mn\pi i\left(w_1 + \frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\cos\pi(v + m\tau)}, \end{cases}$$

$$18)\quad \begin{cases} F_{00}(v, a) = e^{\pi i(n+1)v} \cdot F_{10}\left(v, a + \frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i(n+1)v} \sum \frac{e^{(2m+1)n\pi i\left(w_2 + \frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v + \frac{2m+1}{2}\tau\right)}, \end{cases}$$

$$19)\quad \begin{cases} F_{03}(v, a) = e^{\pi i(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \cdot F_{13}\left(v, a + \frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum \frac{(-1)^m e^{(2m+1)n\pi i\left(w_2 + \frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\cos\pi\left(v + \frac{2m+1}{2}\tau\right)}, \end{cases}$$

$$20)\quad \begin{cases} F_{20}(v, a) = e^{\pi i(n+1)v} \cdot F_{20}\left(v, a + \frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i(n+1)v} \sum \frac{(-1)^m e^{(2m+1)n\pi i\left(w_2 + \frac{(n+1)}{2n}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v + \frac{2m+1}{2}\tau\right)}, \end{cases}$$

$$21)\quad \begin{cases} F_{33}(v, a) = e^{\pi i(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \cdot F_{23}\left(v, a + \frac{\tau}{2}\right) \\ \qquad = e^{\pi i(n+1)\left(v+\frac{1}{2}\right)} \sum \frac{e^{(2m+1)\,\pi i\left(w_2 + \frac{n+1}{2n}\tau\right)}}{\cos\pi\left(v + \frac{2m+1}{2}\tau\right)}. \end{cases}$$

Im Falle $n = 0$ muss a den Ungleichheiten genügen:

$$q < e^{2\pi i\left(a+\frac{\tau}{2}\right)} < \frac{1}{q}.$$

Damit sind sechszehn neue Functionen definirt, die als Grundlage für die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art dienen können. Die mannigfachen Zusammenhänge, die zwischen ihnen bestehen, sind durch ihre Entstehungsweise skizzirt worden. Die Summen sind in allen Formeln nach m von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen.

§ 15.

Fortsetzung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Weitere Darstellungen der eingeführten Functionen.

Die eingeführten sechszehn Functionen können noch in verschiedene andere Formen gebracht werden. Wir wollen zwei derselben näher in Betracht ziehen. Um die erste zu erhalten setzen wir:

$$1)\qquad x = e^{2\pi i v},$$

$$2)\qquad y_1 = e^{2n\pi i w},$$

dann kann geschrieben werden:

$$3a)\qquad F_{01}(v,a) = 2i\sum\frac{y_1^m}{x^{\frac{1}{2}}.\,q^m - x^{-\frac{1}{2}}.\,q^{-m}}$$

oder also wir erhalten für $F_{01}(v,a)$ die zweite Darstellung:

$$3b)\qquad F_{01}(v,a) = -\,2ix^{\frac{1}{2}}\sum\frac{y_1^m.\,q^m}{1-x\,.\,q^{2m}},$$

wobei die Summe nach m von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen ist.

Ganz analog erhalten wir:

$$4)\qquad F_{02}(v,a) = 2x^{\frac{1}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_1^m.\,q^m}{1+x\,.\,q^{2m}},$$

$$5)\qquad F_{31}(v,a) = -\,2ix^{\frac{1}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_1^m.\,q^m}{1-x\,.\,q^{2m}},$$

$$6)\qquad F_{32}(v,a) = 2x^{\frac{1}{2}}\sum\frac{y_1^m.\,q^m}{1+x\,.\,q^{2m}}.$$

Führen wir die Bezeichnungsweise ein:

$$7)\qquad y_2 = e^{2n\pi i w_2},$$

so ergeben sich die weiteren Darstellungen:

$$8)\qquad F_{10}(v,a) = -\,2ix^{\frac{1}{2}}\sum\frac{y_2^{\frac{2m+1}{2}}\,q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-x\,.\,q^{2m+1}},$$

$$9)\qquad F_{13}(v,a) = 2x^{\frac{1}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_2^{\frac{2m+1}{2}}.\,q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+x\,.\,q^{2m+1}},$$

10) $$F_{20}(v,a) = -2ix^{\frac{1}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_2^{\frac{2m+1}{2}}\cdot q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-x\cdot q^{2m+1}}.$$

11) $$F_{23}(v,a) = 2x^{\frac{1}{2}}\sum\frac{y_2^{\frac{2m+1}{2}}\cdot q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+x\cdot q^{2m+1}}.$$

In ganz ähnlicher Weise ergeben sich die Darstellungen:

12) $$F_{11}(v,a) = -2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{y_1^m\cdot q^{m(n+2)}}{1-x\cdot q^{2m}},$$

13) $$F_{12}(v,a) = 2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_1^m\cdot q^{m(n+2)}}{1+x\cdot q^{2m}},$$

14) $$F_{21}(v,a) = 2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_1^m\cdot q^{m(n+2)}}{1-x\cdot q^{2m}},$$

15) $$F_{22}(v,a) = 2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{y_1^m\cdot q^{m(n+2)}}{1+x\cdot q^{2m}},$$

16) $$F_{00}(v,a) = -2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{y_2^{\frac{2m+1}{2}}\cdot q^{\frac{2m+1}{2}(n+2)}}{1-x\cdot q^{2m+1}},$$

17) $$F_{03}(v,a) = 2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_2^{\frac{2m+1}{2}}\cdot q^{\frac{2m+1}{2}(n+2)}}{1+x\cdot q^{2m+1}},$$

18) $$F_{30}(v,a) = -2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{(-1)^m y_2^{\frac{2m+1}{2}}\cdot q^{\frac{2m+1}{2}(n+2)}}{1-x\cdot q^{2m+1}},$$

19) $$F_{33}(v,a) = 2ix^{\frac{n+2}{2}}\sum\frac{y_2^{\frac{2m+1}{2}}\cdot q^{\frac{2m+1}{2}(n+2)}}{1+x\cdot q^{2m+1}}.$$

Neben dieser Darstellung soll nun noch eine Darstellung unserer Functionen in der Form von doppelt unendlichen Reihen gegeben werden.

Wir fanden:

$$F_{01}(v,a) = \sum\frac{e^{2mn\pi i\left(w+\frac{m\tau}{2}\right)}}{\sin\pi(v+m\tau)}.$$

Greifen wir zwei Glieder heraus, die gleichen und entgegengesetzten Werthen von m entsprechen, so erhalten wir:

$$q^{m^2 n}\left[\frac{e^{2mn\pi iw}}{\sin\pi(v+m\tau)}+\frac{e^{-2mn\pi iw}}{\sin\pi(v-m\tau)}\right].$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{\sin\pi(v+m\tau)} = -2i\sum_1^\infty{}^r e^{(2r-1)\pi i(v+m\tau)}$$

$$\frac{1}{\sin\pi(v-m\tau)} = 2i\sum_1^\infty{}^r e^{(2r-1)\pi i(-v+m\tau)},$$

wobei die Ungleichungen zu bestehen haben:

$$|q^2| < |e^{2\pi i v}| < \left|\frac{1}{q^2}\right|.$$

Hieraus folgt für das allgemeine Glied der Werth:

$$4\sum_1^\infty{}^r q^{m^2n+m(2r-1)}.\sin\pi[2mnw+(2r-1)v],$$

oder also wir erhalten die Darstellung:

$$20)\qquad F_{01}(v,a) = \frac{1}{\sin\pi v} + 4\sum_1^\infty{}^m\sum_1^\infty{}^r q^{s_1}.\sin\pi u_1,$$

wobei gesetzt ist:

$$s_1 = m^2n + m(2r-1),$$
$$u_1 = 2mnw + (2r-1)v.$$

Genau so ergiebt sich:

$$21)\qquad F_{02}(v,a) = \frac{1}{\cos\pi v} + 4\sum\sum(-1)^{m+r-1}q^{s_1}.\cos\pi u_1,$$

$$22)\qquad F_{31}(v,a) = \frac{1}{\sin\pi v} + 4\sum\sum(-1)^m q^{s_1}.\sin\pi u_1,$$

$$23)\qquad F_{32}(v,a) = \frac{1}{\cos\pi v} + 4\sum\sum(-1)^{r-1}q^{s_1}.\cos\pi u_1.$$

Die Resultate modificiren sich etwas in den Fällen, in welchen an Stelle von $2m$ der Ausdruck $2m+1$ tritt, indessen sind die Modificationen so unwesentlich, dass wir füglich die Resultate hinschreiben können.

Es ergiebt sich:

$$24)\qquad F_{10}(v,a) = 4\sum\sum q^{s_2}.\sin\pi u_2,$$

$$25)\qquad F_{13}(v,a) = 4\sum\sum(-1)^{m+r-1}q^{s_2}.\sin\pi u_2,$$

$$26)\qquad F_{20}(v,a) = 4\sum\sum(-1)^m.q^{s_2}.\cos\pi u_2,$$

$$27)\qquad F_{23}(v,a) = 4\sum\sum(-1)^{r-1}q^{s_2}.\cos\pi u_2.$$

Die Summen sind wie in den vorhergehenden Fällen nach m und nach r von 1 bis ∞ zu erstrecken, ferner ist gesetzt worden:

$$28)\quad \begin{cases} s_2 = \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 n + \frac{(2r-1)(2m-1)}{2}, \\ u_2 = (2m-1)nw + (2r-1)v. \end{cases}$$

Die übrigen Ausdrücke folgen aus den soeben hingeschriebenen durch Vermehrung von a um $\frac{\tau}{2}$.

§ 16.

Entwickelung der Primfunctionen in trigonometrische Reihen mit Hülfe der in den vorigen Paragraphen eingeführten Restfunctionen.

Mit Hülfe der soeben eingeführten Functionen ist es nicht schwer, die Primfunctionen, die wir in den früheren Paragraphen für den Fall gefunden haben, dass die Zahl der Nullpunkte grösser oder gleich der Zahl der Unendlichkeitspunkte ist, in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Wir wollen dazu der kürzeren Bezeichnungsweise wegen setzen:

$$1)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_\alpha[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]\,\vartheta'_1}{\vartheta_\beta(v,\tau)\,\vartheta_\gamma[(n+1)a,(n+1)\tau]} = P_{\alpha\beta\gamma}(v,a),$$

dann leistet die Function:

$$P_{010}(v,a)$$

als Function von v den Gleichungen Genüge:

$$f(v+1) = -f(v),$$
$$f(v+\tau) = e^{-\pi i n(2v+\tau)} f(v),$$

denselben Gleichungen, die wir für die Function $F_{01}(v,a)$ gefunden haben, ferner hat die Function:

$$P_{010}(v,a) - F_{01}(v,a)$$

keine Unendlichkeitspunkte im Endlichen mehr und lässt sich daher nach angegebenen Methoden darstellen. Ist n eine gerade Zahl, so nimmt sie die Form an:

$$\sum_1^n{}^r c_{2r-1}\,.\,e^{-\pi i(2r-\ )v}\,\vartheta_3\left(nw - \frac{2r-1}{2}\tau,\, n\tau\right),$$

ist n dagegen eine ungerade Zahl, so kann sie geschrieben werden:

$$\sum_0^{n-1} c_{2r}\,.\,e^{-2\pi i r v}\,.\,\vartheta_2(nw - r\tau,\, n\tau).$$

Die Grössen c sind bekannte Constanten. Damit ist die Entwickelung einer Function in trigonometrische Reihen gegeben und zwar vermittelst einer Methode, die als eine indirecte bezeichnet werden muss. Ganz genau so sind die anderen Functionen zu untersuchen. Wir beschränken uns darauf, die Resultate hinzuschreiben und wollen hierzu noch die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$2) \qquad S_\alpha = \sum_0^{n-1}{}^r c_{2r} \,.\, e^{-2\pi i r v} \,.\, \vartheta_\alpha(nw - r\tau, n\tau),$$

$$3) \qquad S'_\alpha = \sum_1^{n} c_{2r-1} \,.\, e^{-(2r-1)\pi i v}\, \vartheta_\alpha\left(nw - \frac{2r-1}{2}\tau, n\tau\right).$$

Bei den eingeführten Bezeichnungen erhalten wir die Resultate:

I. $n \equiv 0 \, mod\, 2$.

$$4) \qquad P_{010}(v, a) = F_{01}(v, a) + S'_3,$$
$$5) \qquad P_{023}(v, a) = F_{02}(v, a) + S'_0,$$
$$6) \qquad P_{313}(v, a) = F_{31}(v, a) + S'_0,$$
$$7) \qquad P_{320}(v, a) = F_{32}(v, a) + S'_3,$$
$$8) \qquad P_{100}(v, a) = F_{10}(v, a) + S'_3,$$
$$9) \qquad P_{133}(v, a) = -iF_{13}(v, a) + S'_0,$$
$$10) \qquad P_{203}(v, a) = iF_{20}(v, a) + S'_0,$$
$$11) \qquad P_{230}(v, a) = F_{23}(v, a) + S'_3,$$
$$12) \qquad P_{111}(v, a) = F_{11}(v, a) + S_3,$$
$$13) \qquad P_{122}(v, a) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} F_{12}(v, a) + S_0,$$
$$14) \qquad P_{212}(v, a) = F_{21}(v, a) + S_0,$$
$$15) \qquad P_{221}(v, a) = (-1)^{\frac{n}{2}} F_{22}(v, a) + S_3,$$
$$16) \qquad P_{001}(v, a) = F_{00}(v, a) + S_3,$$
$$17) \qquad P_{032}(v, a) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} F_{03}(v, a) + S_0,$$
$$18) \qquad P_{302}(v, a) = iF_{30}(v, a) + S_0,$$
$$19) \qquad P_{331}(v, a) = (-1)^{\frac{n}{2}} F_{33}(v, a) + S_3$$

II. $n \equiv 1 \, mod\, 2$.

$$20) \qquad P_{010}(v, a) = F_{01}(v, a) + S_2,$$
$$21) \qquad P_{020}(v, a) = F_{02}(v, a) + S_1,$$
$$22) \qquad P_{313}(v, a) = F_{31}(v, a) + S_1,$$
$$23) \qquad P_{323}(v, a) = F_{32}(v, a) + S_2,$$

24) $$P_{100}(v, a) = F_{10}(v, a) + S_3,$$

25) $$P_{130}(v, a) = -iF_{13}(v, a) + S_0,$$

26) $$P_{203}(v, a) = iF_{20}(v, a) + S_0,$$

27) $$P_{233}(v, a) = F_{23}(v, a) + S_3,$$

28) $$P_{111}(v, a) = F_{11}(v, a) + S_2,$$

29) $$P_{121}(v, a) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} F_{12}(v, a) + S_1,$$

30) $$P_{212}(v, a) = F_{21}(v, a) + S_1,$$

31) $$P_{222}(v, a) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} F_{22}(v, a) + S_2,$$

32) $$P_{001}(v, a) = F_{00}(v, a) + S_3,$$

33) $$P_{030}(v, a) = (-1)^{\frac{n}{2}} F_{03}(v, a) + S_0,$$

34) $$P_{302}(v, a) = i\,.\,F_{30}(v, a) + S_0,$$

35) $$P_{332}(v, a) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} F_{33}(v, a) + S_3.$$

Setzen wir im ersten Falle $n = 0$, so ergeben sich die trigonometrischen Entwickelungen der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art.

§ 17.

Erste directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Die Methode, die im vorigen Paragraphen angewandt worden ist, um die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln, muss als eine indirecte bezeichnet werden. Wir wollen nun versuchen, einige directe Methoden aufzustellen, welche zu der Lösung desselben Problems führen, hierbei aber kürzer wie bei der indirecten Methode verfahren.

Wir denken uns dazu die Function vorgelegt:

1) $$\varphi(v, a) = \frac{\vartheta_0[(n+1)v + (n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta_0(v, \tau)},$$

so kann dieselbe jedenfalls in einem gewissen Bezirk in der Form dargestellt werden:

2) $$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^r b_{2r} \,.\, e^{2r\pi i v}.$$

Hierbei, wie überhaupt bei den folgenden Betrachtungen dieses Paragraphen, nehmen wir n als eine ungerade Zahl an.

Setzen wir ferner:

$$3)\quad \psi(v,a)=\frac{\vartheta_1[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta_1(v,\tau)}-\pi\frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1}\frac{1}{\sin\pi v},$$

so folgt der Ansatz:

$$4)\qquad \psi(v,a)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r}\, c_{2r+1}\,.\,e^{(2r+1)\pi i v}.$$

Wie leicht folgt, sind wir berechtigt, links und rechts in dieser Formel an Stelle von v: $v+\frac{\tau}{2}$ zu setzen.

Wir erhalten dann auf der linken Seite den Ausdruck:

$$A-B$$

$$A=e^{-\pi i[nv+(n+1)a]}\,.\,q^{-\frac{n}{4}}\,.\,\frac{\vartheta_0[(n+1)v+(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta_0(v,\tau)}$$

$$B=\pi\frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1}.\ \frac{1}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)},$$

auf der rechten dagegen:

$$q^{\frac{1}{2}}\sum c_{2r+1}\,.\,q^r.\,e^{(2r+1)\pi i v}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir für $\varphi(v,a)$ einen zweiten Ausdruck, nämlich:

$$5)\qquad \varphi(v,a)=e^{\pi i[nv+(n+1)a]}\,q^{\frac{n}{4}}F,$$

$$F=\pi\frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1}\ \frac{1}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}+q^{\frac{1}{2}}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_{2r+1}q^r e^{(2r+1)\pi i v}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung:

$$\frac{1}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}=-2iq^{\frac{1}{2}}.\,e^{\pi i v}\sum_{0}^{\infty}{}^{r}e^{2r\pi i v}.\,q^r,$$

so erhalten wir für $\varphi(v,a)$ eine zweite Reihe, die nach steigenden und fallenden Potenzen von $e^{\pi i v}$ fortschreitet.

Durch Vergleichung ergiebt sich:

$$6)\quad b_{2r}=q^{-\frac{n}{4}}.\,\lambda\,.\,q^r\left(-2\pi i\frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1}+c_{2r-n}\right),$$

vorausgesetzt, dass die Ungleichung stattfindet:

$$2r>n+1$$

und gesetzt ist:

$$\lambda=e^{2\pi i a}.$$

Für die übrigen Werthe von r erhalten wir:

$$b_{2r}=q^{-\frac{n}{4}}.\,\lambda\,.\,q^r\,.\,c_{2r-n}$$

Setzen wir an Stelle von r: $-r$, so können wir die letzte Gleichung schreiben:

$$b_{-2r} = q^{-\frac{n}{4}} . \lambda . q^{-r} . c_{-2r-n},$$

wo nun r leicht angebbare Werthe besitzt.

In dieser Gleichung setzen wir an Stelle von r: $r-n$, so erhalten wir:

$$7) \qquad b_{-2(r-n)} = q^{\frac{3n}{4}-r} . \lambda . c_{-2r+n}.$$

Man überzeugt sich ferner unmittelbar, dass die Relationen bestehen:

$$\varphi(-v, -a) = \varphi(v, a), \quad \psi(-v, -a) = \psi(v, a).$$

Sieht man die Grössen b und c als Functionen von a an, so wird:

$$b_{-2r}(-a) = b_{2r}(a),$$

$$c_{-(2r+1)}(-a) = c_{2r+1}(a).$$

Setzt man daher in Gleichung 7) an Stelle von a: $-a$, wobei zu beachten ist, dass hierfür λ in seinen reciproken Werth übergeht, so erhalten wir:

$$b_{-2(r-n)}(-a) = q^{\frac{3n}{4}-r} \lambda^{-1} c_{-2r+n}(-a)$$

oder also:

$$b_{2(r-n)}(a) = q^{\frac{3n}{4}-r} \lambda^{-1} c_{2r-n}(a).$$

Setzen wir diesen Werth oder besser gesagt, den hieraus folgenden Werth, von $c_{2r-n}(a)$ in Gleichung 6) ein, so erhalten wir für b_{2r} den Ausdruck:

$$8) \quad -2\pi i q^{r-\frac{n}{4}} . e^{\pi i(n+1)a} \frac{\vartheta_1[(n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta'_1} + q^{2r-n} . e^{2\pi i(n+1)a} . b_{2(r-n)}.$$

Hieraus folgen die Darstellungen 9):

$$b_{2r} = A_1 + B_1,$$

$$b_{2r} = A_2 + B_2,$$

$$A_1 = e^{2\mu\pi i(n+1)a + \mu\pi i\tau(-\mu n + 2r)} b_{2r-2\mu n},$$

$$B_1 = -2\pi i \frac{\vartheta_1[(n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta'_1} \sum_1^{\mu} {}_m e^{(2m-1)\pi i\left((n+1)a - \frac{2m-1}{4} n\tau + r\tau\right)},$$

$$A_2 = e^{-2\mu\pi i(n+1)a - \mu\pi i\tau(\mu n + 2r)} b_{2r+2\mu n},$$

$$B_2 = 2\pi i \frac{\vartheta_1[(n+1)a, (n+1)\tau]}{\vartheta'_1} \sum_1^{\mu} {}_m e^{-(2m-1)\pi i\left((n+1)a + \frac{2m-1}{4} n\tau + r\tau\right)}.$$

So haben wir Recursionsformeln gefunden, mit deren Hülfe es möglich ist, die Entwickelung der Function $\varphi(v, a)$ in trigonometrische Reihen wirklich herzustellen.

In der That, jedenfalls können wir schreiben:

$$10)\qquad \varphi(v, a) = b_0 + b_2 e^{2\pi i v} + \cdots b_{2n-2} e^{2\pi i (n-1) v} + S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \sum_1^{\infty}{}^{\mu} \sum_0^{n-1}{}^{r} b_{2r+2n\mu} \,.\, e^{2\pi i (r+n\mu) v},$$

$$S_2 = \sum_1^{\infty}{}^{\mu} \sum_0^{n-1}{}^{r} b_{2r-2n\mu} \,.\, e^{2\pi i (r-n\mu) v}$$

Die Ausdrücke $b_{2r\pm 2n\mu}$ können vermöge der angegebenen Recursionsformeln durch die Grössen b_{2r} ersetzt werden. Es ergeben sich dann zweierlei Arten von Gliedern. Erstens erhalten wir solche, die den Factor b_{2r} besitzen, zweitens solche, bei denen dasselbe nicht der Fall ist. Die Glieder der ersten Art können leicht bestimmt werden. In der That, der Factor von b_{2r} wird:

$$e^{2\pi i r v} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} e^{2\mu\pi i [nv + (n+1)a] + \mu\pi i \tau (\mu n + 2r)}$$

oder also gleich:

$$e^{2\pi i r v}\, \vartheta_3 [nv + (n+1)a + r\tau, n\tau].$$

Etwas schwieriger gestaltet sich die Summirung der übrigen Glieder. Für einen festen Werth von μ ergeben sich aus der Summe:

$$\sum_1^{\infty}{}^{\mu} \sum_0^{n-1}{}^{r} b_{2r+2n\mu}\, e^{2\pi i (r+n\mu) v}$$

die Glieder:

$$-2\pi i \frac{\vartheta_1 |(n+1)a, (n+1)\tau|}{\vartheta'_1} e^{2\pi i n\mu v} M,$$

wobei gesetzt ist:

$$11)\quad \begin{cases} M = e^{(2\mu-1)(n+1)a\pi i + \left(\mu^2 - \frac{1}{2^2}\right) n\pi i\tau} \sum\limits_0^{n-1}{}^{r} q^{(2\mu-1)r} \,.\, e^{2\pi i r v} \\ \quad + e^{(2\mu-3)(n+1)a\tau\, i + \left(\mu^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) n\pi i\tau} \sum\limits_0^{n-1}{}^{r} q^{(2\mu-3)r} \,.\, e^{2\pi i r v} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + e^{(n+1)a\pi i + \left(\mu - \frac{1}{2^2}\right)^{n\pi i\tau}} \sum\limits_0^{n-1}{}^{r} q^{r} \,.\, e^{2\pi i r v}. \end{cases}$$

Die Summen können in eine einfache Form gebracht werden und zwar lauten dieselben der Reihe nach:

$$\frac{1 - q^{(2\mu-1)n} \,.\, e^{2\pi i n v}}{1 - q^{2\mu-1} \,.\, e^{2\pi i v}},$$

$$\frac{1 - q^{(2\mu-3)n} \,.\, e^{2\pi i n v}}{1 - q^{2\mu-3} \,.\, e^{2\pi i v}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{1 - q^{n} \,.\, e^{2\pi i n v}}{1 - q \,.\, e^{2\pi i v}},$$

oder also wir erhalten für M die Form:

$$12) \qquad M = \sum_{0}^{\mu-1} m e^{(2m+1)\pi i\left[(n+1)a + n\tau\left(\mu - \frac{2m+1}{4}\right)\right]} \frac{1 - q^{n(2m+1)} \,.\, e^{2\pi i n v}}{1 - q^{2m+1} \,.\, e^{2\pi i v}}.$$

Dieser Ausdruck ist für M einzusetzen und die Summe nach μ von 1 bis ∞ zu nehmen. Als Factor von:

$$-2\pi i \frac{\vartheta_1[(n+1)a, [n+1)\tau]}{\vartheta'_1}$$

ergiebt sich hierbei die folgende Grösse:

$$e^{2n\pi i v} C_1 + e^{4n\pi i v}(C_2 + C_3) + \cdots$$

$$C_1 = e^{(n+1)\pi i a} \,.\, q^{n\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} \frac{1 - q^{n} \,.\, e^{2n\pi i v}}{1 - q \,.\, e^{2\pi i v}},$$

$$C_2 = e^{(n+1)\pi i a} \,.\, q^{n\left(2 - \frac{1}{2^2}\right)} \frac{1 - q^{n} \,.\, e^{2n\pi i v}}{1 - q \,.\, e^{2\pi i v}},$$

$$C_3 = e^{3(n+1)\pi i a} \,.\, q^{n\left(6 - \frac{3^2}{2^2}\right)} \frac{1 - q^{3n} \,.\, e^{2n\pi i v}}{1 - q^{3} \,.\, e^{2\pi i v}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wir wollen jetzt alle Glieder zusammenfassen, die den Factor besitzen:

$$e^{(2m-1)(n+1)\pi i a} q^{-n\left(m - \frac{1}{2}\right)^2} \frac{1 - q^{(2m-1)n} \,.\, e^{2n\pi i v}}{1 - q^{2m-1} \,.\, e^{2\pi i v}}.$$

Dieselben lauten:

$$q^{nm(2m-1)} \,.\, e^{2nm\pi i v} + q^{n(m+1)(2m-1)} \,.\, e^{2n(m+1)\pi i v} + \cdots$$

oder also:

$$\frac{q^{nm(2m-1)} \,.\, e^{2nm\pi i v}}{1 - q^{n(2m-1)} \,.\, e^{2n\pi i v}}.$$

Das Product der beiden Glieder ergiebt:

$$\frac{e^{(n+1)(2m-1)\pi i a} \,.\, q^{n\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)} \,.\, e^{2nm\pi i v}}{1 - q^{2m-1} \,.\, e^{2\pi i v}}.$$

Dieser Ausdruck ist nach m von 1 bis ∞ zu summiren, sodass wir schliesslich erhalten:

$$-2\pi i \frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1} \sum_1^{\infty}{}_m \frac{e^{(n+1)(2m-1)\pi i a} \cdot q^{n\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2nm\pi i v}}{1-q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Genau so würden sich aus der zweiten Summe die Glieder ergeben:

$$-2\pi i \frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1} \sum_0^{-\infty}{}_m \frac{e^{(n+1)(2m-1)\pi i a} \cdot q^{n\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2nm\pi i v}}{1-q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Daraus folgt, dass die Summe aller Glieder, die nicht mit einer der Grössen b_{2r} multiplicirt sind, lautet:

$$-2\pi i \frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{(n+1)(2m-1)\pi i a} \cdot q^{n\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} e^{2nm\pi i v}}{1-q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}$$

oder auch:

$$13) \qquad \pi \frac{\vartheta_1[(n+1)a,(n+1)\tau]}{\vartheta'_1} e^{(n-1)\pi i v} \cdot F,$$

$$F = \sum \frac{e^{n(2m-1)\pi i\left(w+\frac{2m-1}{4}\tau+\frac{n-1}{2n}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m-1}{2}\tau\right)}.$$

Damit haben wir aber die Resultate des vorigen Paragraphen, von unwesentlichen formalen Aenderungen abgesehen, wieder gefunden und sind auf systematischem Wege zu einer der Restfunctionen gelangt. Die übrigen können auf analogem Wege gefunden werden oder aber nach angegebenen Methoden aus der einen abgeleitet werden.

§ 18.

Zweite directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Viel Aehnlichkeit mit der soeben entwickelten Methode hat eine zweite, bei welcher an Stelle der Entwickelung nach Potenzen von $e^{\pi i v}$ sogleich eine Entwickelung nach Potenzen von $e^{\pi i v}$ und $e^{\pi i a}$ angesetzt wird. Aus diesem Grunde begnügen wir uns damit, sie an dem Falle der Functionen zweiter Art durchzuführen. Jedenfalls sind wir berechtigt, innerhalb eines gewissen Bereiches von v die Entwickelung anzusetzen:

$$1) \qquad \frac{\vartheta_3(v+a,\tau)}{\vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s a_{r,s} \cdot q^{r^2} \cdot e^{2\pi i(ra+sv)}.$$

In dieser Entwickelung kann a alle endlichen Werthe annehmen. Setzen wir an Stelle von a: $a+\tau$, so wird einerseits:

$$\frac{\vartheta_3(v+a+\tau,\tau)}{\vartheta_0(v)} = \frac{e^{-2\pi i\left(v+a+\frac{\tau}{2}\right)}\cdot\vartheta_3(v+a,\tau)}{\vartheta_0(v)}$$

und andererseits ergiebt sich für die Grösse $a_{r,s}$ die Recursionsformel:

$$a_{r-1,s-1} = a_{r,s},$$

oder auch:

2) $$a_{r,s} = a_{r-s,0}.$$

Aus dieser Formel folgt, dass es zur Kenntniss der gesuchten Coefficienten völlig genügt, die Grössen $a_{r,0}$ für alle Werthe von r zwischen $+\infty$ und $-\infty$ zu kennen. Dabei findet zu gleicher Zeit die Relation statt:

3) $$a_{r,0} = a_{-r,0}.$$

Genau so können wir setzen:

4) $$\frac{\vartheta_2(v+a,\tau)}{\vartheta_1(v)} = \pi\frac{\vartheta_2(a,\tau)}{\vartheta'_1}\frac{\cos\pi v}{\sin\pi v} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s b_{r,s}\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}\cdot e^{\pi i[(2r+1)a+2sv]}.$$

Die Grössen $b_{r,s}$ können genau so reducirt werden, wie die Grössen $a_{r,s}$, da aber ihre Bestimmung nicht in Frage steht, so beschränken wir uns auf Aufstellung der einen Beziehung:

5) $$b_{r,s} = -b_{-r-1,-s}.$$

Jetzt wird genau so verfahren, wie bei der vorigen Methode. Wir setzen in Gleichung 4) an Stelle von v: $v+\frac{\tau}{2}$.

Durch Coefficientenvergleichung ergiebt sich die Relation:

6) $$a_{r+1,0}\cdot q^{(r+1)^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{\vartheta'_1} - i\cdot b_{r,0}\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}.$$

In dieser Gleichung setzen wir an Stelle von r: $-r$, so erhalten wir:

$$a_{-r+1,0}\cdot q^{(r-1)^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}}{\vartheta'_1} - i\cdot b_{-r,0}\cdot q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2},$$

oder also:

$$a_{r-1,0}\cdot q^{(r-1)^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}}{\vartheta'_1} - + i\cdot b_{r-1,0}\cdot q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}.$$

Mithin ergiebt sich die Recursionsformel:

7) $$a_{r+1,0}\cdot q^{(r+1)^2} + a_{r,0}\cdot q^{r^2} = -\frac{2\pi}{\vartheta'_1}q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2},$$

oder auch die Formel:

8) $$\begin{cases} a_{r,0}\cdot q^{r^2} = -\dfrac{2\pi}{\vartheta'_1}\left(q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2} - q^{\left(r+\frac{3}{2}\right)^2}\cdots(-1)^n q^{\left(r+n+\frac{1}{2}\right)^2}\right) \\ \qquad + (-1)^{n+1}a_{r+n+1}\cdot q^{(r+n+1)^2}. \end{cases}$$

Diese Formel lehrt alle Grössen $a_{r,0}$ kennen, wenn $a_{0,0}$ gegeben ist, sie giebt aber auch $a_{r,0}$ unmittelbar in expliciter Gestalt, indem wir $n = \infty$ setzen. Wir erhalten dann den Ausdruck:

$$9) \qquad a_{r,0} = -\frac{2\pi}{\vartheta'_1} q^{-r^2} \sum_0^{\infty}{}_n (-1)^n q^{\left(r+n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Wir kommen auf diesem Wege zu Functionen, die schon im ersten Bande, § 29, betrachtet worden sind. Setzen wir, wie am angegebenen Orte:

$$a_r = \sum_0^{\infty} (-1)^n q^{\left(r+n+\frac{1}{2}\right)^2},$$

so erhalten wir das Resultat:

$$10) \qquad -\frac{\vartheta'_1}{2\pi} \frac{\vartheta_3(v+a,\tau)}{\vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s a_{r-s} \cdot q^{2rs-s^2} \cdot e^{2\pi i(ra+sv)}$$

oder auch:

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s a_{s-r} \cdot q^{2rs-s^2} \cdot e^{2\pi i(ra+sv)}.$$

Diese Form ist um dessentwillen von Interesse, weil die Coefficienten sich in überaus einfacher Weise mit Hülfe der Grössen a_r ausdrücken lassen. Von der früheren Darstellung ist sie verschieden, indessen ist die Reduction auf dieselbe nicht schwer. Wir deuten sie kurz an.

Wenn s eine positive Zahl ist, wollen wir den Factor von $e^{2\pi i s v}$ schreiben:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_0^{\infty}{}_n q^{2rs-s^2} (-1)^n q^{\left(s-r+n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2\pi i r a},$$

wenn s eine negative Zahl ist, schreiben wir ihn:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_0^{\infty}{}_n q^{2rs-s^2} (-1)^n q^{\left(r-s+n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2\pi i r a}.$$

In der ersten Summe setzen wir:

$$r = s + n - m,$$

so nimmt sie die Form an:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_0^{\infty}{}_n (-1)^n q^{s(2n+1)+\left[s-\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^2} e^{2\pi i a\left[s-\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]} e^{\pi i a(2n+1)},$$

oder also auch:

$$\vartheta_2(a,\tau) \sum_0^{\infty}{}_n (-1)^n q^{s(2n+1)} e^{\pi i a(2n+1)}.$$

Aehnlich kann die zweite Summe geschrieben werden:

$$\vartheta_2(a, \tau)\sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n q^{-s(2n+1)} e^{-\pi i a(2n+1)}.$$

Die weitere Reduction auf die frühere Form bietet keine Schwierigkeit dar. Die Convergenzbedingungen sind nicht besonders hervorgehoben worden.

§ 19.

Dritte directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Wesentlich verschieden von den bisher betrachteten Methoden ist die folgende, die sich auf die Multiplication zweier unendlicher Reihen stützt. Es ist unter Hinzunahme der in § 29 des ersten Bandes entwickelten Reihen:

$$1)\qquad \frac{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(nv + na, n\tau)}{2\pi\vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s b_{rs} \,.\, e^{n\pi i(2r+1)a + \pi i(2s+1)v},$$

wobei sich vermöge der Regeln über die Multiplication zweier unendlicher Reihen die Grössen b_{rs} in der Form ergeben:

$$b_{r,s} = (-1)^{r+1} . i . q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(s - \frac{n-1}{2} - nr\right)^2} a_{s - \frac{n-1}{2} - nr}.$$

Aus dieser Darstellung folgt die weitere:

$$2)\qquad \frac{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(nv + na, n\tau)}{2\pi \,.\, \vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s c_{r,s} \,.\, e^{n\pi i(2r+1)a + \pi i(2s+n)v},$$

$$c_{r,s} = (-1)^{r+1} . i . q^{n\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - (s-nr)^2} a_{s-nr}.$$

Hierbei ist n als eine ungerade Zahl vorausgesetzt.

Ist dagegen n eine gerade Zahl, so folgt:

$$3)\qquad \frac{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(nv + na, n\tau)}{2\pi\,\vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s b_{r,s} \,.\, e^{n\pi i(2r+1)a + 2\pi i s v},$$

wobei die Grössen $b_{r,s}$ die Form haben:

$$b_{r,s} = (-1)^{r+1} . i . q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(s - \frac{n}{2} - nr\right)^2} . a_{s - \frac{n}{2} - nr}.$$

Aus dieser Darstellung folgt die weitere:

$$4)\qquad \frac{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(nv + na, n\tau)}{2\pi \,.\, \vartheta_0(v, \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s c_{r,s} \,.\, e^{n\pi i(2r+1)a + \pi i(2s+n)v},$$

$$c_{r,s} = (-1)^{r+1} . i . q^{n\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (s-nr)^2} . a_{s-rn}.$$

So haben wir eine gemeinsame Darstellung gefunden, welche sowohl für gerade als auch ungerade Werthe von n gilt. Auf die Wichtigkeit derselben braucht kaum näher eingegangen zu werden. Sie besteht darin, dass keine unbekannten Coefficienten in der fertigen Formel mehr enthalten sind, sodass alle Schwierigkeiten, die in der Bestimmung dieser Coefficienten liegen, von selbst entfallen.

Freilich sind die soeben untersuchten Functionen verschieden von den in den früheren Paragraphen behandelten und zwar unterscheiden sie sich um den Factor $\vartheta_0(na, n\tau)$. Um unter solchen Umständen die Darstellung der ursprünglichen Functionen zu erhalten, muss dieser Factor $\vartheta_0(na, n\tau)$ abgesondert werden. Wir wollen der Einfachheit halber dieses Problem nicht im allgemeinen Falle, sondern nur im Falle $n = 1$ durchführen. Hierbei kann dann ganz analog verfahren werden, wie im vorigen Paragraphen, daneben führt aber auch die folgende Untersuchung zum Ziel.

Im Falle $n = 1$ wird:

$$5) \qquad \frac{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(v+a)}{2\pi \,.\, \vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{s} c_{r,s}\, e^{(2r+1)\pi i a + (2s+1)\pi i v},$$

$$c_{r,s} = i \,.\, (-1)^{r+1} q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 - (s-r)^2} a_{s-r}.$$

Diese Reihe multipliciren wir noch mit:

$$\frac{\vartheta'_1}{\pi \vartheta_0(a, \tau)},$$

so erhalten wir die Darstellung:

$$6) \qquad \frac{\vartheta'^2_1 \,.\, \vartheta_1(v+a)}{2\pi^2 \,.\, \vartheta_0(v)\, \vartheta_0(a)} = -2i \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{s} A_{rs} \,.\, e^{(2r+1)\pi i a + (2s+1)\pi i v},$$

$$A_{r,s} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} (-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - (s-m)^2 - (r-m)^2} \,.\, a_{s-m} \,.\, a_{r-m}.$$

Es lässt sich diese Darstellung in eine bedeutend einfachere Form bringen.

Zunächst ist klar, dass die Coefficienten der Gleichung Genüge leisten:

$$7) \qquad A_{r,s} = -A_{-r-1,\,-s-1}.$$

Dann aber wird:

$$A_{r,s+1} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} (-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - (s-m+1)^2 - (r+m)^2} a_{s+1-m} \,.\, a_{r-m},$$

oder wir erhalten nach leichten Reductionen:

$$8) \quad A_{r,s+1} = q^{2r+1} \,.\, A_{r,s} + (-)^{s+1} q^{(s+1)^2 + \frac{2r+1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m} (-1)^m q^{2m(s+1)} a_m.$$

Ist demnach s verschieden von -1, so folgt:

9) $$A_{r,s+1} = q^{2r+1} . A_{r,s}.$$

Genau so wird:

10) $$A_{r+1,s} = q^{2s+1} A_{r,s} + (-1)^{r+1} q^{(r+1)^2 + \frac{2s+1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{2m(r+1)} . a_m.$$

Ist also r verschieden von -1, so wird:

11) $$A_{r+1,s} = q^{2s+1} . A_{r,s}.$$

Ferner folgt aus unseren letzten Formeln:

$$A_{0,0} = q . A_{-1,0} + q^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'_1}{2\pi},$$

$$A_{-1,0} = q^{-1} . A_{-1,-1} + q^{-\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'_1}{2\pi},$$

oder also wir erhalten die Beziehungen:

12) $$A_{0,0} = q . A_{-1,0} + q^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'_1}{2\pi} = - A_{-1,-1} = - q . A_{-1,0} + q^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'_1}{2\pi}.$$

Hieraus folgt:

13) $$A_{0,0} = q^{\frac{1}{2}} . \frac{\vartheta'_1}{2\pi},$$

oder also wir erhalten für positive r und s:

14) $$A_{r,s} = q^{\frac{(2r+1)(2s+1)}{2}} \frac{\vartheta'_1}{2\pi}.$$

Ferner folgt:

$$A_{-1,0} = A_{0,-1} = 0$$

und damit allgemein:

15) $$A_{r,s} = 0,$$

falls eine und nur eine der beiden Zahlen r und s negativ ist. Sind beide negativ, so ergiebt sich der dazu gehörende Werth des Coefficienten aus der Gleichung:

16) $$A_{r,s} = - A_{-r-1,s-1}.$$

Wir erhalten auf diese Weise die bekannten Resultate.

§ 20.

Specielle Discussion des Falles $n = 1$.

Es sollen nunmehr einige Anwendungen der gefundenen Resultate gegeben werden. Zunächst ist klar, dass, wenn $n = 0$ gesetzt wird, sich Reihenentwickelungen für die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art ergeben, aus denen für $a = 0$ unmittelbar die schon im ersten Bande aufgestellten Entwickelungen der gewöhnlichen elliptischen Functionen sich ergeben. Die Entwickelungen der Functionen zweiter

Art sind seit längerer Zeit bekannt, die von uns gewählten Formen unterscheiden sich theilweise von den Formen bei andern Mathematikern z. B. Scheibner und zwar dadurch, dass a um τ vermehrt worden ist. Auf den Fall $n = 0$ folgt der Fall $n = 1$. Derselbe soll jetzt näher ins Auge gefasst werden und zwar von vornherein für den Fall $a = 0$. Es bleiben dann im Ganzen zwölf Quotienten zu betrachten übrig, da vier von den sechszehn möglichen Quotienten thatsächlich ganze transcendente Functionen sind, wie sich aus den Formeln ergiebt:

$$\frac{\vartheta_1(2v, 2\tau)}{\vartheta_0(0, 2\tau)} = \frac{\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)}{\vartheta_0 \cdot \vartheta_3},$$

$$\frac{\vartheta_0(2v, 2\tau)}{\vartheta_0(0, 2\tau)} = \frac{\vartheta_0(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_0 \cdot \vartheta_3}.$$

Die besten Ausdrucksformen ergeben sich nun im allgemeinen Falle, wenn wir von den Doppelsummen ausgehen.

Wir nehmen als speciellen Fall für $n = 1$ die Function:

$$1)\quad F_{01}(v, a) = \frac{1}{\sin \pi v} + 4\sum_1^\infty {}^m \sum_1^\infty {}^r q^{m^2+(2r-1)m} . \sin[\pi v(2m + 2r - 1) + 4\pi a m],$$

wobei dann $a = 0$ zu setzen ist. Führen wir einen anderen Summationsindex μ ein, der mit m und r durch die Gleichung verbunden ist:

$$2m + (2r - 1) = 2\mu - 1,$$

so können wir die Doppelsumme schreiben:

$$4\sum_1^\infty {}^\mu q^{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} . S_\mu . \sin(2\mu + 1)\pi v,$$

oder wir erhalten die Formel:

$$2)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_0(2v, 2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_1(v, \tau)\,\vartheta_0(0, 2\tau)} = \frac{1}{\sin \pi v} + 4\sum_1^\infty {}^\mu q^{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} . S_\mu . \sin(2\mu + 1)\pi v,$$

wobei gesetzt ist:

$$S_\mu = q^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + q^{-\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \dots q^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Ganz analog wird:

$$3)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_1(2v, 2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_0(v, \tau)\,\vartheta_0(0, 2\tau)} = 4\sum_1^\infty q^{\mu^2} . S_\mu . \sin 2\mu\pi v.$$

Durch die Substitution halber Perioden ergeben sich aus diesen beiden Formeln die zwei andern:

$$4)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_1(2v, 2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_3(v, \tau)\,\vartheta_0(0, 2\tau)} = 4\sum_1^\infty (-1)^{\mu-1} q^{\mu^2} . S_\mu . \sin 2\mu\pi v,$$

$$5)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_0(2v, 2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_2(v, \tau)\,\vartheta_0(0, 2\tau)} = \frac{1}{\cos \pi v} + 4\sum_1^\infty (-1)^\mu q^{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2} . S_\mu . \cos(2\mu + 1)\pi v.$$

Ganz analog können die fehlenden acht Formeln aufgestellt werden und zwar wird es nur nöthig sein, vier derselben auf directem Wege zu entwickeln, die vier andern ergeben sich dann durch Substitution halber Perioden. Wir wollen dazu der einfacheren Schreibweise wegen analoge Bezeichnungen einführen, wie es Biehler gethan hat.

Wir setzen:

$$
6)\quad\left\{\begin{aligned}
Z(v) &= 4\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}q^{\mu^2}.\,R_\mu\,.\,\cos 2\mu\pi v,\\
U(v) &= \frac{1}{\sin\pi v}+4\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\mu}q^{\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2}.\,R_\mu\,.\,\sin(2\mu+1)\pi v,\\
Z_1(v) &= -4\sum_{1}^{\infty}q^{\mu^2}.\,R_\mu\,.\,\cos 2\mu\pi v,\\
U_1(v) &= \frac{1}{\cos\pi v}+4\sum_{1}^{\infty}q^{\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2}.\,R_\mu\,.\,\cos(2\mu+1)\pi v,
\end{aligned}\right.
$$

$$R_\mu = q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} \ldots (-1)^{\mu-1}q^{-\left(\frac{2\mu-1}{2}\right)^2}.$$

Bei Einführung dieser Bezeichnungen erhalten wir die Ausdrücke:

$$7)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_0(v,\tau)\vartheta_2(0,2\tau)} = A_{30}\,.\,\vartheta_0(v) + Z(v),$$

$$8)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_2(0,2\tau)} = A_{21}\,.\,\vartheta_1(v) + U(v),$$

$$9)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_0(v,\tau)\vartheta_3(0,2\tau)} = A_{20}\,.\,\vartheta_0(v) + Z(v),$$

$$10)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_3(0,2\tau)} = A_{31}\,.\,\vartheta_1(v) + U(v),$$

ferner ergiebt sich durch Substitution halber Perioden:

$$11)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_3(v,\tau)\vartheta_2(0,2\tau)} = A_{30}\,.\,\vartheta_3(v) + Z(v),$$

$$12)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_2(v,\tau)\vartheta_2(0,2\tau)} = -A_{21}\,.\,\vartheta_2(v) - U_1(v).$$

$$13)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_2(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_3(v,\tau)\vartheta_3(0,2\tau)} = -A_{20}\,.\,\vartheta_3(v) - Z(v),$$

$$14)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3(2v,2\tau)\vartheta'_1}{\vartheta_2(v,\tau)\vartheta_3(0,2\tau)} = A_{31}\,.\,\vartheta_2(v) + U_1(v).$$

Die Constanten sind in diesen Formeln unmittelbar durch Specialisirung der Argumente gegeben. Nimmt man nun bekannte Formeln

der quadratischen Transformation hinzu, so ergeben sich unmittelbar die trigonometrischen Entwickelungen der Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_\alpha^2(v,\tau)}{\vartheta_\gamma(v,\tau)}.$$

In der That, es ist:

$$15)\quad \begin{cases} \vartheta^2_1(v,\tau) = \vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_3(2v,2\tau) - \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_2(2v,2\tau), \\ \vartheta^2_0(v,\tau) = \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(2v,2\tau) - \vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_2(2v,2\tau), \\ \vartheta^2_2(v,\tau) = \vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_3(2v,2\tau) + \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_2(2v,2\tau), \\ \vartheta^2_3(v,\tau) = \vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_2(2v,2\tau) + \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(2v,2\tau). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt dann z. B:

$$16)\quad \frac{\vartheta^2_1(v)}{\vartheta_0(v)} = A\,.\,\vartheta_0(v) + \frac{\pi}{\vartheta'_1}[\vartheta^2_2(0,2\tau) - \vartheta^2_3(0,2\tau)]Z(v),$$

wobei der Werth der Constanten A nicht besonders hingeschrieben zu werden braucht. Nun ist aber bekanntlich:

$$-\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2\vartheta_3} = \frac{\pi}{\vartheta'_1}\left(\vartheta^2_2(0,2\tau) - \vartheta^2_3(0,2\tau)\right),$$

sodass wir die Darstellung erhalten:

$$17)\quad \frac{\vartheta^2_1(v)}{\vartheta_0(v)} = A\,.\,\vartheta_0(v) - \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2\vartheta_3}Z(v),$$

oder auch:

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_0}\frac{\vartheta^2_1(v)}{\vartheta_0(v)} = A_1 . \vartheta_0(v) - Z(v),$$

oder also indem wir durch Nullsetzen der Argumente die Constante bestimmen:

$$18)\quad \vartheta_2 . \vartheta_3 \frac{\vartheta^2_1(v)}{\vartheta_0(v)} = Z(0)\vartheta_0(v) - \vartheta_0\,.\,Z(v).$$

Es ist dieses die Darstellung, wie sie sich in der Biehler'schen Arbeit vorfindet. Genau so ergiebt sich:

$$19)\quad \vartheta_2\,.\,\vartheta_3\frac{\vartheta^2_0(v)}{\vartheta_1(v)} = Z(0)\vartheta_1(v) + \vartheta_0\,.\,U(v),$$

$$20)\quad \vartheta_2\,.\,\vartheta_3\frac{\vartheta^2_2(v)}{\vartheta_3(v)} = Z(0)\vartheta_3(v) - \vartheta_0\,.\,Z_1(v),$$

$$21)\quad \vartheta_2\,.\,\vartheta_3\frac{\vartheta^2_3(v)}{\vartheta_2(v)} = Z(0)\vartheta_2(v) + \vartheta_0\,.\,U_1(v),$$

$$22)\quad \vartheta_0\,.\,\vartheta_2\frac{\vartheta^2_1(v)}{\vartheta_3(v)} = Z\left(\frac{1}{2}\right)\vartheta_3(v) + \vartheta_3\,.\,Z_1(v),$$

$$23)\qquad \vartheta_0 \,.\, \vartheta_2 \frac{\vartheta^2{}_0(v)}{\vartheta_2(v)} = -Z\left(\frac{1}{2}\right)\vartheta_2(v) + \vartheta_3 \,.\, U_1(v),$$

$$24)\qquad \vartheta_0 \,.\, \vartheta_2 \frac{\vartheta^2{}_2(v)}{\vartheta_0(v)} = Z\left(\frac{1}{2}\right)\vartheta_0(v) + \vartheta_3 \,.\, Z(v) \quad ,$$

$$25)\qquad \vartheta_0 \,.\, \vartheta_2 \frac{\vartheta^2{}_3(v)}{\vartheta_1(v)} = -Z\left(\frac{1}{2}\right)\vartheta_1(v) + \vartheta_3 \,.\, U(v) \;,$$

$$26)\qquad \vartheta_0 \,.\, \vartheta_3 \frac{\vartheta^2{}_3(v)}{\vartheta_0(v)} = U_1(0)\vartheta_0(v) + \vartheta_2 \,.\, Z(v) \quad ,$$

$$27)\qquad \vartheta_0 \,.\, \vartheta_3 \frac{\vartheta^2{}_2(v)}{\vartheta_1(v)} = -U_1(0)\vartheta_1(v) + \vartheta_2 \,.\, U(v) \;,$$

$$28)\qquad \vartheta_0 \,.\, \vartheta_3 \frac{\vartheta^2{}_0(v)}{\vartheta_3(v)} = U_1(0)\,\vartheta_3(v) + \vartheta_2 \,.\, Z_1(v) \quad ,$$

$$29)\qquad \vartheta_0 \,.\, \vartheta_3 \frac{\vartheta^2{}_1(v)}{\vartheta_2(v)} = -U_1(0)\vartheta_2(v) + \vartheta_2 \,.\, U_1(v).$$

Etwas anders gestaltet sich die Untersuchung der Quotienten von der Form:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v)\,\vartheta_\beta(v)}{\vartheta_\gamma(v)}.$$

Vier dieser Quotienten sind unmittelbar bestimmt. In der That, es gelten die Formeln:

$$\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v) = \vartheta_0(0, 2\tau)\,\vartheta_1(2v, 2\tau),$$

$$\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v) = \vartheta_0(0, 2\tau)\,\vartheta_0(2v, 2\tau).$$

Hieraus folgt die Darstellung der vier Quotienten:

$$\frac{\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \frac{\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_3(v)},$$

$$\frac{\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)}, \quad \frac{\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_2(v)}$$

und zwar so unmittelbar aus den früheren Untersuchungen, dass sie nicht näher hingeschrieben zu werden brauchen.

Wir nehmen jetzt diejenigen Quotienten, deren Zähler lautet:

$$\vartheta_2(v, \tau)\,\vartheta_0(v, \tau).$$

Nach den Regeln der quadratischen Transformation können wir diesen Ausdruck schreiben:

$$\vartheta_0\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}(0, 2\tau)\left(\vartheta_0\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}(2v, 2\tau) + \vartheta_0\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\end{bmatrix}(2v, 2\tau)\right),$$

oder auch:

$$\vartheta_0\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}(0, 2\tau)\,q^{\frac{1}{8}}\left(e^{\pi i v}.\,\vartheta_0\left[2v + \frac{\tau}{2}, 2\tau\right] + e^{-\pi i v}.\,\vartheta_0\left[2v - \frac{\tau}{2}, 2\tau\right]\right).$$

Hieraus folgt, dass die Berechnung des Quotienten:

$$\frac{\vartheta_2(v,\tau)\,\vartheta_0(v,\tau)}{\vartheta_1(v,\tau)}$$

zurückgeführt ist auf die Berechnung des Ausdrucks:

$$\frac{e^{\pi i v}.\,\vartheta_0\left(2v+\frac{\tau}{2},2\tau\right)+e^{-\pi i v}.\,\vartheta_0\left(2v-\frac{\tau}{2},2\tau\right)}{\vartheta_1(v,\tau)}.$$

Nach unseren früheren Betrachtungen können wir diesen Ausdruck schreiben:

$$\frac{\pi}{\vartheta'_1}\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2},2\tau\right)F+c\vartheta_2\left(v,+\frac{\tau}{2},\tau\right)e^{\pi i v}+c'\vartheta_2\left(v-\frac{\tau}{2},\tau\right)e^{-\pi i v},$$

$$F=e^{\pi i v}F_{01}\left(v,\frac{\tau}{4}\right)+e^{-\pi i v}F_{01}\left(v,-\frac{\tau}{4}\right),$$

oder auch:

$$\frac{\pi}{\vartheta'_1}\vartheta_0\left(\frac{\tau}{2},2\tau\right)\left[e^{\pi i v}.\,F_{01}\left(v,\frac{\tau}{4}\right)+e^{-\pi i v}.\,F_{01}\left(v,-\frac{\tau}{4}\right)\right]+c_1.\,\vartheta_3(v,\tau),$$

wobei c_1 eine Constante bedeutet.

Das ganze Problem kommt unter solchen Umständen darauf hinaus, den Ausdruck:

$$e^{\pi i v}.\,F_{01}\left(v,\frac{\tau}{4}\right)+e^{-\pi i v}.\,F_{01}\left(v,-\frac{\tau}{4}\right)$$

zu bilden, wobei $n = 1$ zu setzen ist.

Wir wählen zu seiner Darstellung die früher gefundenen Doppelsummen. Es ist:

$$30)\begin{cases} F_{01}\left(v,\ \frac{\tau}{4}\right)=\frac{1}{\sin\pi v}+4\sum\limits_1^\infty{}_m\sum\limits_1^\infty{}_r\,q^{m^2+(2r-1)m}.\sin[v\pi(2m+2r-1)+m\pi\tau], \\ F_{01}\left(v,-\frac{\tau}{4}\right)=\frac{1}{\sin\pi v}+4\sum\limits_1^\infty{}_m\sum\limits_1^\infty{}_r\,q^{m^2+(2r-1)m}.\sin[v\pi(2m+2r-1)-m\pi\tau]. \end{cases}$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $e^{\pi i v}$, die zweite mit $e^{-\pi i v}$ und addiren, so ergiebt sich zunächst das Glied:

$$2\,cotang\,\pi v.$$

Das allgemeine Glied in der Summe nimmt, von dem Factor:

$$4q^{m^2+(2r-1)m}$$

abgesehen, die Form an:

$$e^{\pi i v}.\sin[v\pi(2m+2r-1)+m\pi\tau]+e^{-\pi i v}.\sin[v\pi(2m+2r-1)-m\pi\tau].$$

Diesen Ausdruck können wir schreiben:

$$q^m . \sin v\pi(2m+2r) + q^{-m} . \sin v\pi(2m+2r-2).$$

Sehen wir daher von dem Gliede:

$$2 \operatorname{cotang} v\pi$$

ab, so erhalten wir auf der rechten Seite den Ausdruck:

$$\begin{cases} 4\sum_1^\infty m \sum_1^\infty r q^{m^2+2rm} . \sin v\pi(2m+2r) + 4\sum_1^\infty m \sum_1^\infty r q^{m^2+(2r-2)m} \\ \qquad . \sin v\pi(2m+2r-2), \end{cases}$$

oder auch:

$$8\sum_1^\infty m \sum_1^\infty r q^{m^2+2rm} . \sin v\pi(2m+2r) + 4\sum_1^\infty m q^{m^2} . \sin 2v\pi m.$$

Diesen Ausdruck kann man aber, wie man sich leicht überzeugt, schreiben:

$$4\sum_1^\infty m q^{m^2} . A_m . \sin 2mv\pi,$$

$$A_m = 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \cdots 2q^{-(m-1)^2},$$

oder also wir können den Quotienten:

$$\frac{e^{\pi i v} . \vartheta_0\left(2v + \frac{\tau}{2}, 2\tau\right) + e^{-\pi i v} . \vartheta_0\left(2v - \frac{\tau}{2}, 2\tau\right)}{\vartheta_1(v,\tau)}$$

in die Form bringen:

$$\frac{2\pi}{\vartheta'_1} \vartheta_0\left(\frac{\tau}{2}, 2\tau\right)\left(\operatorname{cotang} v\pi + 2\sum_1^\infty m q^{m^2} . A_m . \sin 2mv\pi\right) + c_1 . \vartheta_3(v,\tau).$$

Die Constante c_1 ist gleich Null, wie man sich überzeugt, wenn $v = \frac{1}{2}$ gesetzt wird.

Mithin erhalten wir:

$$\frac{\vartheta_2(v,\tau)\vartheta_0(v,\tau)}{\vartheta_1(v,\tau)} = \frac{2\pi q^{\frac{1}{4}} . \vartheta_0^2\left(\frac{\tau}{2}, 2\tau\right)}{\vartheta'_1}\left(\operatorname{cotang} v\pi + 2\sum_1^\infty m q^{m^2} . A_m . \sin 2mv\pi\right).$$

Nun ist aber:

$$q^{\frac{1}{4}} . \vartheta_0^2\left(\frac{\tau}{2}, 2\tau\right) = \frac{1}{2}\vartheta_0(0,\tau)\vartheta_2(0,\tau),$$

sodass wir schliesslich erhalten:

$$31) \qquad \frac{\vartheta_3 . \vartheta_2(v)\vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)} = \operatorname{cotang} \pi v + 2\sum_1^\infty m q^{m^2} . A_m . \sin 2mv\pi.$$

Es ist diese Formel schon von Biehler in seiner citirten Arbeit aufgestellt worden.

Genau so würde sich ergeben:

$$32)\quad \frac{\vartheta_3 . \vartheta_2(v)\vartheta_0(v)}{\vartheta_3(v)} = 2\sum_1^{\infty}{}^m (-1)^{m-1} . q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . A_m . \cos(2m-1)v\pi,$$

und durch Substitution halber Perioden, indem an Stelle von v gesetzt wird $v+\frac{1}{2}$:

$$33)\quad \frac{\vartheta_3 . \vartheta_1(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_2(v)} = tang\, v\pi + 2\sum_1^{\infty}(-1)^{m-1}q^{m^2} . A_m . \sin 2mv\pi,$$

$$34)\quad \frac{\vartheta_3 . \vartheta_1(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} = 2\sum_1^{\infty}{}^m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . A_m . \sin(2m-1)\pi v..$$

Es bleiben noch vier Quotienten zu betrachten übrig. Um sie zu erledigen, muss die Formel genommen werden:

$$\vartheta_3(v,\tau)\vartheta_2(v,\tau) = q^{\frac{1}{8}} . \vartheta_3\left[\frac{1}{2}\right](0, 2\tau) . f$$

$$f = e^{\pi i v} . \vartheta_3\left(2v+\frac{\tau}{2}, 2\tau\right) + e^{-\pi i v} . \vartheta_3\left(2v-\frac{\tau}{2}, 2\tau\right),$$

im Uebrigen kann genau wie vorhin verfahren werden. Wir erhalten die Resultate:

$$35)\quad \frac{\vartheta_0 . \vartheta_3(v)\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} = 2\sum(-1)^{m-1}q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . B_m . \cos(2m-1)v\pi,$$

$$36)\quad \frac{\vartheta_0 . \vartheta_3(v)\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)} = cotang\, v\pi + 2\sum(-1)^m q^{m^2} . B_m . \sin 2mv\pi,$$

$$37)\quad \frac{\vartheta_0 . \vartheta_0(v)\vartheta_1(v)}{\vartheta_3(v)} = 2\sum q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . B_m . \sin(2m-1)v\pi,$$

$$38)\quad \frac{\vartheta_0 . \vartheta_0(v)\vartheta_1(v)}{\vartheta_2(v)} = tang\, v\pi - 2\sum q^{m^2} . B_m . \sin 2mv\pi,$$

$$B_m = 1 - 2q^{-1} + 2q^{-4} \ldots 2(-1)^{m-1}q^{-(m-1)^2}.$$

Die Summen sind nach m von 1 bis ∞ zu nehmen.

Hiermit sind die Formeln sämmtlich entwickelt, die im Falle $n=1$ aufgestellt werden sollten.

§ 21.

Untersuchung des Falles, dass die Zahl der Unendlichkeitspunkte grösser als die Zahl der Nullpunkte ist. Indirecte Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Wir wollen jetzt zu dem Fall übergehen, dass die Zahl der Unendlichkeitspunkte grösser ist als die Zahl der Nullpunkte. Als Primfunctionen fanden wir in diesem Falle:

$$\frac{\vartheta_\alpha(r-a)}{\vartheta_\beta(r-b)\,\vartheta_\gamma(nr, n\tau)}.$$

Da a und b völlig willkürliche Grössen sind, so können auch die Indices α und β beliebig gewählt werden. Wir wollen sie gleich Null setzen. γ kann die Werthe 0, 1, 2, 3 annehmen. Die Betrachtungen bleiben in jedem der vier Fälle ganz analog. Wir wählen $\gamma = 0$, betrachten also die Function:

$$1)\qquad f(r) = \frac{\vartheta_0(r-a)}{\vartheta_0(r-b)\,\vartheta_0(nr, n\tau)}.$$

Hierbei wollen wir b der Beschränkung unterwerfen, dass es von $\frac{k}{n}$ verschieden ist (k Null oder eine ganze Zahl).

Die Function $f(r)$ genügt den Gleichungen:

$$2)\qquad \begin{cases} f(r+1) = f(r), \\ f(r+\tau) = -e^{-2\pi i(b-a)+\pi i n(2r+\tau)}.f(r), \end{cases}$$

wird überdies unendlich gross an denjenigen Stellen, an welchen entweder:

$$\vartheta_0(r-b) = 0$$

oder:

$$\vartheta_0(nr, n\tau) = 0$$

wird und zwar überall von der ersten Ordnung.

Es soll nun versucht werden, Functionen herzustellen, die denselben beiden Bedingungsgleichungen Genüge leisten und überdies an den definirten Stellen von derselben Art unendlich gross werden, wie die vorgelegten Functionen. Wir definiren dazu erstens:

$$3)\qquad \varphi(r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \frac{e^{2\pi i b mn}.q^{nm(m-1)}.e^{2\pi i r}.e^{2\pi i n(a-b)}}{e^{2\pi i b}.q^{2m-1} - e^{2\pi i r}}.$$

Als Function von r betrachtet, hat dann $\varphi(r)$ die Unendlichkeitspunkte — von ganzen Zahlen abgesehen:

$$r = b - \frac{2m-1}{2}\tau.$$

Ferner ist:

$$\varphi(v+1) = \varphi(v),$$

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(v+\tau)\, e^{2\pi i(b-a)} \\ &= -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2\pi i[bmn+c+m(a-b)+bn]} \,.\, q^{n(m^2+m+1)+n(2m+1)}}{e^{2\pi i b}\,.\,q^{2m+1} - e^{2\pi i v}}. \end{aligned}\right.$$

Um diesen Ausdruck in eine übersichtlichere Form zu bringen, bilden wir die Function:

$$e^{2\pi i(a-b)+\pi i n(2c+\tau)} \,.\, \varphi(v).$$

Dieselbe hat die Form:

$$e^{2\pi i(a-b)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2\pi i[bmn+c+m(a-b)+nv]} \,.\, q^{n(m^2+m+1)}}{e^{2\pi i b}\,.\,q^{2m+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Hieraus ergiebt sich für den Ausdruck:

$$\varphi(v+\tau) + e^{2\pi i(a-b)+\pi i n(2c+\tau)} \,.\, \varphi(v)$$

die Form:

$$4)\quad -i\,.\,q^{\frac{3}{4}n} \,.\, e^{\pi i(a-b)+\pi i n(2c-b)} \sum_{0}^{n-1}{}_r\, e^{-2\pi i r(v-b)} \,.\, \vartheta_1[a+(n-1)b+r\tau, n\tau].$$

Nun nehmen wir zweitens die Functionen:

$$5)\qquad \varphi_\varkappa(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{q^{mn(m+1)} \,.\, e^{2\pi i v} \,.\, e^{2\pi i m(a-b)}}{\alpha_\varkappa \,.\, q^{2m+1} - e^{2\pi i v}},$$

bei welchen gesetzt ist:

$$\alpha_\varkappa = e^{\frac{2\pi i \varkappa}{n}}.$$

Diese Functionen werden dann unendlich an den Punkten:

$$v = \frac{\varkappa}{n} + \frac{2m+1}{2}\tau,$$

wenn man wiederum von ganzen Zahlen absieht.

Ferner ist:

$$\varphi_\varkappa(v+1) = \varphi_\alpha(v),$$

während sich für $\varphi_\varkappa(v+\tau)$ der Ausdruck ergiebt:

$$-e^{2\pi i(a-b)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{q^{n(m^2+m+1)} \,.\, e^{2\pi i c} \,.\, e^{2\pi i m(a-b)} \,.\, q^{n(2m+1)}}{\alpha_\varkappa \,.\, q^{2m+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Wir bilden nun analog wie vorhin den Ausdruck:

$$e^{2\pi i(a-b)+\pi i n(2c+\tau)} \,.\, \varphi_\varkappa(v).$$

Für denselben ergiebt sich die Form:

$$e^{2\pi i(a-b)} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{q^{n(m^2+m+1)} \,.\, e^{2\pi i v} \,.\, e^{2\pi i m(a-b)} \,.\, e^{2\pi i n v}}{\alpha_\varkappa \,.\, q^{2m+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Unter solchen Umständen können wir die Grösse:

$$\varphi_\varkappa(v+\tau) + e^{2\pi i(a-b)+\pi i n(2v+\tau)} . \varphi_\varkappa(v)$$

in die Form bringen:

$$6) \quad -i . q^{\frac{3}{4}n} . e^{\pi i(a-b)} . e^{2\pi i n v} \sum_0^{n-1} r e^{-2r\pi i v} . \alpha_\varkappa{}^r . \vartheta_1(a-b+r\tau, n\tau).$$

Denken wir uns nun die Function $f(v)$ um den Punkt:

$$v = b + \frac{\tau}{2}$$

herum entwickelt, so lautet der Factor von:

$$\frac{1}{v - b - \frac{\tau}{2}}$$

$$7) \qquad R = \frac{1}{i} e^{\pi i[a+(n-1)b]} . q^{\frac{n}{4}} \frac{\vartheta_1(b-a)}{\vartheta'_1 . \vartheta_1(nb, n\tau)}.$$

Denken wir uns ferner die Function $f(v)$ um den Punkt:

$$v = \frac{\varkappa}{n} + \frac{\tau}{2}$$

herum entwickelt, so lautet der Factor von:

$$\frac{1}{v - \frac{\varkappa}{n} - \frac{\tau}{2}}$$

$$8) \qquad R_\varkappa = \frac{1}{i} e^{\pi i(a-b)} . q^{\frac{n}{4}} \frac{\vartheta_1\left(a - \frac{\varkappa}{n}\right)}{n . \theta'_1 . \vartheta_1\left(b - \frac{\varkappa}{n}\right)},$$

wobei unter θ'_1 der Werth des ersten Differentialquotienten von $\vartheta_1(nv, n\tau)$ nach seinem Argument für den Nullwerth des letzteren verstanden ist.

Setzen wir nun:

$$9) \qquad \Phi(v) = R . \varphi(v) + \sum_0^{n-1}{}^\varkappa R_\varkappa . \varphi_\varkappa(v),$$

so folgt leicht, dass $\Phi(v)$ der Gleichung Genüge leistet:

$$\Phi(v+\tau) = -e^{-2\pi i(a-b)+\pi i n(2v+\tau)} \Phi(v).$$

Der Beweis dieser Gleichung kann auf mehrfachem Wege gegeben werden. Erstens kann er mit Hülfe allgemeiner Sätze aus der Functionentheorie gegeben werden und zweitens mit Hülfe einer Thetaformel, die mit leichter Mühe aus den Principien hergeleitet werden kann, die sich im ersten Bande befinden und zuerst von **Enneper** aufgestellt worden ist.

Die Formel, deren Beweis füglich übergangen werden kann, lautet für ungerade n:

$$\frac{n \,.\, \theta'_1 \,.\, \vartheta_1(v+nw, n\tau)\vartheta_0(v,\tau)}{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_0(nw, n\tau)\vartheta_0(v, n\tau)} = \sum_0^{n-1}{}_\varkappa (-1)^\varkappa \frac{\vartheta_1\left(v+w+\frac{\varkappa}{n}, \tau\right)}{\vartheta_0\left(w+\frac{\varkappa}{n}, \tau\right)}.$$

Setzen wir an Stelle von v: $v - \frac{n\tau}{2}$, von w: $w + \frac{n\tau}{2}$, so erhalten wir:

$$\frac{n \,.\, \theta'_1 \,.\, \vartheta_1(v+nw, n\tau)\vartheta_1(v,\tau)}{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(nw, n\tau)\vartheta_1(v, n\tau)} = \sum_0^{n-1}{}_\varkappa \frac{\vartheta_1\left(v+w+\frac{\varkappa}{n}, \tau\right)}{\vartheta_1\left(w+\frac{\varkappa}{n}, \tau\right)},$$

oder wenn wir an Stelle von v und w die Grössen a und b durch die Gleichungen einführen:

$$v = a - b, \quad w = b,$$

$$\frac{n \,.\, \theta'_1 \,.\, \vartheta_1[a+(n-1)b, n\tau]\vartheta_1(a-b,\tau)}{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(nb, n\tau)\vartheta_1(a-b, n\tau)} = \sum_0^{n-1}{}_\varkappa \frac{\vartheta_1\left(a-\frac{\varkappa}{n}, \tau\right)}{\vartheta_1\left(b-\frac{\varkappa}{n}, \tau\right)}.$$

Setzen wir endlich an Stelle von b: $b - r\tau$, so erhalten wir das Resultat:

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{n \,.\, \theta'_1 \,.\, \vartheta_1[a+(n-1)b+r\tau, n\tau] \,.\, \vartheta_1(a-b,\tau)}{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(nb, n\tau)\vartheta_1(a-b+r\tau, n\tau)} \\ &= e^{-2\pi i r b} \sum_0^{n-1}{}_\varkappa \frac{e^{\frac{2\varkappa r\pi i}{n}} \vartheta_1\left(a-\frac{\varkappa}{n}\right)}{\vartheta_1\left(b-\frac{\varkappa}{n}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Eine ähnliche Formel gilt für gerade n.

Hieraus folgt dann unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung, welcher $\Phi(v)$ Genüge leisten soll. Somit leistet $\Phi(v)$ denselben Gleichungen Genüge wie $f(v)$. Da auch die Unendlichkeitspunkte übereinstimmen und die Art des Unendlichwerdens eine analoge ist, so folgt:

$$11)\quad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\vartheta_0(nv, n\tau)} = c\left(R \,.\, \varphi(v) + \sum_0^{n-1}{}_\varkappa R_\varkappa \,.\, \varphi_\varkappa(v)\right).$$

Die Constante c folgt leicht:

$$c = -2\pi i.$$

Damit ist das gestellte Problem gelöst.

Die soeben näher ausgeführte Entwickelung unserer Primfunctionen beruht auf der Einführung einer Reihe neuer Functionen. Alle diese

Functionen können mit Hülfe einfacher Operationen auf die Appell'sche Function zurückgeführt werden, die wir bei denjenigen Functionen betrachtet haben, die mehr Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte besitzen. Wir beschränken uns darauf, die Richtigkeit der Behauptung an einer Function, der Function $\varphi(v)$ nachzuweisen.

Dieselbe war durch die Gleichung definirt:

$$12)\qquad \varphi(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2\pi i b m n} \,.\, q^{nm(m+1)} \,.\, e^{2\pi i v} \,.\, e^{2\pi i m(a-b)}}{e^{2\pi i b} \,.\, q^{2m+1} - e^{2\pi i v}}\,.$$

In dieser Function setzen wir an Stelle von:

$$v : v + c,$$
$$b : v_1 + c - \frac{\tau}{2},$$
$$a : v_1 + c_1 - \frac{\tau}{2},$$

so geht sie über in

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2\pi i v_1 m n} \,.\, q^{mn(m-1)} \,.\, e^{2\pi i v} \,.\, e^{M\pi i}}{e^{2\pi i v_1} \,.\, q^{2m} - e^{2\pi i v}}\,.$$

$$M = 2n\left(mc + \frac{m\tau}{2} + c_1 - c\right).$$

Zwischen den Grössen c und c_1 kann dann noch die Beziehung festgesetzt werden:

$$mc + \frac{m\tau}{2} + c_1 - c = 0,$$

dann geht unsere Function über in:

$$13)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \frac{e^{2\pi i m n v_1} \,.\, q^{nm(m-1)} \,.\, e^{2\pi i v}}{e^{2\pi i v_1} \,.\, q^{2m} - e^{2\pi i v}}\,.$$

Das ist aber die Appell'sche Function, nur dass v und v_1 vertauscht ist. Von der von uns bei unseren Untersuchungen gebrauchten Function unterscheidet sie sich noch um den Factor $(-1)^m$, indessen ist schon damals bemerkt worden, dass dieser Unterschied vollkommen irrelevant ist.

In ähnlicher Weise können wir die anderen Functionen reduciren und erhalten das überaus wichtige von Appell aufgestellte Resultat, dass auch die Theorie derjenigen Functionen, bei welchen die Zahl der Unendlichkeitspunkte grösser ist als die Zahl der Nullpunkte, auf eine einzige Function zurückgeführt werden kann, die aus der früher betrachteten durch Vertauschung von v und v_1 entsteht. Wir gehen auf dieses Resultat später noch einmal ein.

Die eingeführten Functionen können nun auch in der Form von Doppelsummen dargestellt werden. Es möge das kurz folgendermaassen ausgeführt werden.

Die Function $\varphi(v)$ war durch die Summe dargestellt worden:

$$\varphi(v) = \sum (-1)^m \frac{e^{2\pi i b n m} \cdot q^{n m(m+1)} \cdot e^{2\pi i v} \cdot e^{2\pi i m(a-b)}}{e^{2\pi i b} \cdot q^{2m+1} - e^{2\pi i v}}.$$

Wir greifen zunächst diejenigen Glieder heraus, welche sich auf negative Werthe von m beziehen. Dieselben können geschrieben werden:

$$-\sum_0^\infty{}_m (-1)^m \frac{e^{-2\pi i b[n(m+1)+1]} \cdot q^{n m(m+1)+2m+1} \cdot e^{2\pi i v} \cdot e^{-2\pi i(m+1)(a-b)}}{1 - e^{-2\pi i b} \cdot q^{2m+1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Diesen Ausdruck können wir nach Potenzen von:

$$e^{-2\pi i b} \cdot q^{2m+1} \cdot e^{2\pi i v}$$

entwickeln. Das Resultat bringen wir in die folgende Form:

$$\sum_{\frac{n+1}{2}}^\infty{}_r A_r \cdot e^{\pi i(2r+1-n)v},$$

wobei A_r gesetzt ist gleich:

$$A_r = -\sum_0^\infty{}_m (-1)^m e^{-\pi i b(2mn+n+2r+1)} \cdot q^{nm^2 + \frac{2m+1 \cdot 2r+1}{2} - \frac{n}{2}} \cdot e^{-2\pi i(m+1)(a-b)}.$$

Hierbei ist n als ungerade Zahl angenommen. Der Fall eines geraden n kann ganz analog behandelt werden.

Aehnlich nehmen die Glieder, die sich auf den Nullwerth und die positiven Werthe von m beziehen, die Form an:

$$\sum_{\frac{n-1}{2}}^\infty{}_r B_r \cdot e^{-\pi i(2r+1-n)v},$$

wobei B_r gesetzt ist gleich:

$$B_r = -\sum_0^\infty{}_m (-1)^m e^{\pi i b(2mn-n+2r+1)} \cdot q^{nm^2 + \frac{2m+1 \cdot 2r+1}{2} - \frac{n}{2}} \cdot e^{2\pi i m(a-b)}.$$

Wir können demgemäss die ganze Summe auch folgendermaassen schreiben:

$$14) \qquad \varphi(v) = \sum_1^\infty{}_m \sum_{\frac{n+1}{2}}^\infty{}_r (-1)^m q^{nm^2+m(2r+1)-nm} \cdot e^{\pi i f}$$

$$- \sum_0^\infty{}_m \sum_{\frac{n-1}{2}}^\infty{}_r (-1)^m q^{nm^2+m(2r+1)-nm} \cdot e^{\pi i f'}$$

wobei gesetzt ist:

$$f = \quad (2r+1-n)\left(v-b-\frac{\tau}{2}\right) - m[2a+2(n-1)b+n\tau],$$

$$f' = -(2r+1-n)\left(v-b-\frac{\tau}{2}\right) + m[2a+2(n-1)b+n\tau].$$

Hieraus folgt die Darstellung:

15) $$\varphi(v) = S + S',$$

$$S = -\sum_0^\infty {}_r e^{2\pi i r\left(-v+b+\frac{\tau}{2}\right)} + \sum_0^\infty {}_m (-1)^{m+1} q^{nm^2} . e^{\pi i m[2a+2(n-1)b+n\tau]},$$

$$S' = 2i\sum_1^\infty {}_m \sum_1^\infty {}_r (-1)^m q^{nm^2+2rm} . \sin w\pi,$$

$$w = 2r\left(v-b-\frac{\tau}{2}\right) - m[2a+2(n-1)b+n\tau].$$

Hiermit ist das Problem für die Function $\varphi(v)$ vollkommen gelöst. Auf die Convergenzbedingungen braucht nicht näher eingegangen zu werden.

Genau so wird:

16) $$\varphi_\varkappa(v) = \sum_1^\infty {}_m \sum_{\frac{n+1}{2}}^\infty {}_r (-1)^m q^{nm^2+m(2r+1)-nm} . e^{\pi i f_\varkappa}$$

$$-\sum_0^\infty {}_m \sum_{\frac{n-1}{2}}^\infty {}_r (-1)^m q^{nm^2+m(2r+1)-nm} . e^{\pi i f'_\varkappa},$$

wobei gesetzt ist:

$$f_\varkappa = \quad (2r+1-n)\left(v-\frac{\varkappa}{n}-\frac{\tau}{2}\right) - m(2a-2b+n\tau),$$

$$f'_\varkappa = -(2r+1-n)\left(v-\frac{\varkappa}{n}-\frac{\tau}{2}\right) + m(2a-2b+n\tau).$$

Hieraus folgt die endgültige Formel:

17) $$\varphi_\varkappa(v) = S_\varkappa + S'_\varkappa,$$

$$S_\varkappa = -\sum_0^\infty {}_r e^{2\pi i r\left(-v+\frac{\varkappa}{n}+\frac{\tau}{2}\right)} + \sum_0^\infty {}_m (-1)^{m+1} q^{nm^2} . e^{\pi i m(2a-2b+n\tau)},$$

$$S'_\varkappa = 2i\sum_1^\infty {}_m \sum_1^\infty {}_r (-1)^m q^{nm^2+2rm} . \sin w_\varkappa \pi,$$

$$w_\varkappa = 2r\left(v-\frac{\varkappa}{n}-\frac{\tau}{2}\right) - m(2a-2b+n\tau).$$

Damit sind die eingeführten Functionen durch Doppelsummen dargestellt.

§ 22.

Erste directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Es soll nun eine directe Methode angegeben werden, mit deren Hülfe die Primfunctionen in trigonometrische Reihen entwickelt werden können. Wir nehmen dazu an, dass $b = \frac{1}{2}$ ist, setzen überdies fest, dass n eine ungerade Zahl sei. Es braucht kaum näher hervorgehoben zu werden, dass in allen andern Fällen durchaus analog verfahren werden kann.

Unter den gemachten Voraussetzungen können wir setzen:

$$1)\qquad \frac{\vartheta_1(v-a)}{\pi\vartheta_2(v)\vartheta_1(nv, n\tau)} = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_2(0, n\tau) \cos\pi v},$$

$$A_2 = \sum_0^{n-1}{}_\varkappa (-1)^{\varkappa+1} \frac{\vartheta_1\left(a - \frac{\varkappa}{n}\right)}{n \,.\, \vartheta'_1 \,.\, \vartheta_2\left(\frac{\varkappa}{n}\right) \sin\pi\left(v - \frac{\varkappa}{n}\right)},$$

$$A_3 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m c_{2m+1} \,.\, e^{\pi i(2m+1)v}.$$

Die Richtigkeit der Behauptung folgt unmittelbar, wenn wir die Unendlichkeitspunkte links und rechts betrachten und um dieselben die entsprechenden Reihenentwickelungen herstellen.

Setzen wir links und rechts an Stelle von v: $v + \frac{\tau}{2}$, so erhalten wir auf der linken Seite:

$$\frac{e^{\pi i\left(nv + a + \frac{n\tau}{4}\right)} \vartheta_0(v-a)}{\pi \,.\, \vartheta_3(v)\vartheta_0(nv, n\tau)},$$

während die Grössen A der Reihe nach übergehen in:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta'_1 \,.\, \vartheta_2(0, n\tau)\cos\pi\left(v + \frac{\tau}{2}\right)},$$

$$\sum_0^{n-1}{}_\varkappa \frac{(-1)^{\varkappa+1}\vartheta_1\left(a - \frac{\varkappa}{n}\right)}{n \,.\, \vartheta'_1 \,.\, \vartheta_2\left(\frac{\varkappa}{n}\right) \sin\pi\left(v - \frac{\varkappa}{n} + \frac{\tau}{2}\right)},$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m c_{2m+1} \; e^{\pi i(2m+1)v} \,.\, q^{\frac{2m+1}{2}}.$$

Durch Entwickelung der reciproken Sinus und Cosinus ergiebt sich:

$$2)\qquad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\pi\,.\,\vartheta_3(v)\vartheta_0(nv,n\tau)} = B_1 + B_2 + B_3,$$

$$B_1 = \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2(a)}{\vartheta'_1\,.\,\vartheta_2(0,n\tau)}\,e^{-\pi i(nv+a)}\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m e^{\pi i(2m+1)v}\,.\,q^{\frac{2m+1}{2}-\frac{n}{4}},$$

$$\left\{\begin{array}{l} B_2 = \dfrac{2ie^{-\pi ia}}{n\,.\,\vartheta'_1}\displaystyle\sum_0^{n-1}{}_\varkappa\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^\varkappa e^{\pi iv(2m+1-n)}\,.\,q^{\frac{2m+1}{2}-\frac{n}{4}}\,.\,e^{\frac{-\pi i\varkappa(2m+1)}{n}}\,.\,F, \\[2ex] \qquad F = \dfrac{\vartheta_1\left(a-\dfrac{\varkappa}{n}\right)}{\vartheta_2\left(\dfrac{\varkappa}{n}\right)}, \end{array}\right.$$

$$B_3 = e^{-\pi ia}\sum_0^{\infty}{}_m c_{2m+1}\,.\,e^{\pi iv(2m+1-n)}\,.\,q^{\frac{2m+1}{2}-\frac{n}{4}}.$$

Andererseits sind wir aber berechtigt anzusetzen:

$$3)\qquad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_3(v)\vartheta_0(nv,n\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m b_{2m}\,.\,e^{\pi iv(2m+1-n)}.$$

Unter solchen Umständen folgt durch Vergleichung für den Nullwerth und für positive Werthe von m:

$$4)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_{2m}\,.\,q^{\frac{n}{4}-\frac{2m+1}{2}} = \dfrac{2i\,.\,e^{-\pi ia}}{n\,.\,\vartheta'_1}\displaystyle\sum_0^{n-1}{}_\varkappa(-1)^\varkappa e^{\frac{-\pi i\varkappa(2m+1)}{n}}\,.\,\dfrac{\vartheta_1\left(a-\dfrac{\varkappa}{n}\right)}{\vartheta_2\left(\dfrac{\varkappa}{n}\right)} \\[2ex] \qquad - 2(-1)^{\frac{n-1}{2}-m}\,.\,e^{-\pi ia}\dfrac{\vartheta_2(a)}{\vartheta'_1\,.\,\vartheta_2(0,n\tau)} - e^{-\pi ia}\,.\,c_{2m+1}. \end{array}\right.$$

Ist dagegen m negativ, so wird:

$$5)\qquad b_{2m}\,.\,q^{\frac{n}{4}-\frac{2m+1}{2}} = e^{-\pi ia}\,.\,c_{2m-1}.$$

Die Grössen b und c hängen jedenfalls von a ab, wir wollen sie unter solchen Umständen bezeichnen durch:

$$b_{2m}(a) \text{ und } c_{2m-1}(a)$$

Dann folgt für alle Werthe von m:

$$c_{2m-1}(a) = c_{-2m-1}(-a),$$

$$b_{2m-2+2n}(a) = b_{-2m}(-a),$$

also vermöge Gleichung 5):

$$c_{2m-1}(a) = q^{\frac{2m-1}{2}-\frac{n}{4}}\,.\,e^{-\pi ia}\,.\,b_{2m-2n}$$

für $m = 0, 1, \ldots \infty$.

Setzen wir diesen Werth in Gleichung 4) ein, so nimmt dieselbe die Form einer Recursionsformel an, welcher die Grössen b Genüge leisten.

Aus ihr ergiebt sich für b_{2m} die Gleichung:

$$7) \qquad b_{2m} q^{\frac{n}{4} - \frac{2m+1}{2}} \cdot e^{\pi i a} = C'_1 + C'_2,$$

$$C_1 = \frac{2i}{n\theta'_1} \sum_0^{n-1} {}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa} e^{\frac{-\pi i \varkappa (2m+1)}{n}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(a - \frac{\varkappa}{n}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\varkappa}{n}\right)} \sum_0^{\infty} {}_r e^{-2\pi i r a} \cdot q^{r^2 n + r(2m+1)},$$

$$C'_2 = 2(-1)^{m + \frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_2(0, n\tau)} \sum_0^{\infty} {}_r (-1)^r e^{-2\pi i r a} \cdot q^{r^2 n + r(2m+1)}.$$

Die Formel gilt für $m = 0$ und für alle positiven Werthe von m.

Für negative Werthe von m sind die Grössen b bestimmt, vermöge der Formel: $\quad b_{-2m}(-a) = b_{2m-2+2a}(a).$

Die Uebereinstimmung der soeben gefundenen Resultate mit den im vorigen Paragraphen entwickelten braucht nicht näher nachgewiesen zu werden.

Somit sind wir auf systematischem Wege zur Aufstellung der im vorigen Paragraphen eingeführten Functionen gekommen.

§ 23.

Zweite directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Die zweite directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln, hat viel Aehnlichkeit mit der ersten. Sie unterscheidet sich von derselben im Wesentlichen dadurch, dass wir uns von vornherein die Entwickelung nach Potenzen von $e^{\pi i v}$ und $e^{\pi i a}$ angesetzt denken.

Wir machen nämlich den Ansatz:

$$1) \qquad \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_1(v - a)}{\vartheta_2(v)\,\vartheta_1(nv, n\tau)} = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$A_1 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2(a)}{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_2(0, n\tau) \cos \pi v},$$

$$A_2 = \sum_0^{n-1} {}_{\varkappa} \frac{(-1)^{\varkappa+1} \vartheta_1\left(a - \frac{\varkappa}{n}\right)}{n \cdot \theta'_1 \cdot \vartheta_2\left(\frac{\varkappa}{n}\right) \sin \pi \left(v - \frac{\varkappa}{n}\right)},$$

$$A_3 = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m c_{2m+1,\, 2r+1} \cdot e^{\pi i [(2m+1)v + (2r+1)a]}.$$

Aehnlich kann gesetzt werden:

$$2)\quad \frac{1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v)\,\vartheta_0(nv,n\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r\, b_{2m,2r}\,.\, e^{\pi i[(2m+1-n)v+2ra]}.$$

Dann folgt genau so wie bei der ersten Methode für $m=0$ und für positive Werthe von m:

$$3)\quad \begin{cases} q^{\frac{n}{4}-\frac{2m+1}{2}}\,.\,b_{2m,2r} = \dfrac{2(-1)^r q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{n\,.\,\theta'_1}\,\displaystyle\sum_0^{n-1}{}_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa e^{-\frac{\pi i\varkappa}{n}(2m+2r+2)}}{\vartheta_2\left(\frac{\varkappa}{n}\right)} \\ \qquad + \dfrac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}+m} q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{\vartheta'_1\,.\,\vartheta_2(0,n\tau)} + c_{2m+1,2r+1}. \end{cases}$$

Für negative Werthe von m wird:

$$4)\quad q^{\frac{n}{4}-\frac{2m+1}{2}}\,.\,b_{2m,2r} = c_{2m+1,2r+1}.$$

Andererseits ist:

$$c_{2m+1,2r+1} = q^{\frac{n}{4}+\frac{2m+1}{2}}\,.\,b_{2m+2n,2r+2}$$

für $m=0$ und positive Werthe von m.

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung 3) ein, so erhalten wir wieder eine Recursionsformel, welcher die Grössen b Genüge leisten.

Dieselbe nimmt durch die folgende Erwägung eine besonders einfache Gestalt an.

Fassen wir den Ausdruck:

$$\frac{\vartheta_0(v-a)}{\pi\,.\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_0(nv,n\tau)}$$

als Function von a auf und bezeichnen ihn als solche durch $\psi(a)$, so ist:

$$\psi(a+\tau) = e^{\pi i(2v-2a-\tau)}\,\psi(\tau),$$

also:

$$b_{2m,2r} = b_{2m+2,2r-2}\,.\,q^{2r-1}$$

oder:

$$5)\quad b_{2m,2r} = b_{2m+2r,0}\,.\,q^{r^2}.$$

Hieraus folgt, dass wir berechtigt sind, in Gleichung 3) von vornherein $r=0$ anzunehmen. Dieselbe erhält dann die Gestalt:

$$6)\quad \begin{cases} q^{\frac{n}{4}-\frac{2m+1}{4}}\,.\,b_{2m,0} = \dfrac{2q^{\frac{1}{4}}}{n\,.\,\theta'_1}\displaystyle\sum_0^{n-1}{}_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa e^{\frac{-\pi i\varkappa}{n}(2m+2)}}{\vartheta_2\left(\frac{\varkappa}{n}\right)} + \dfrac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}+m} q^{\frac{1}{4}}}{\vartheta'_1\,.\,\vartheta_2(0,n\tau)} \\ \qquad + q^{\frac{n}{4}+\frac{2m+1}{2}+1}\,.\,b_{2m+2n+2,0}. \end{cases}$$

Hiermit sind wir wiederum am Ziele. Der fertige Ausdruck für $b_{2m,0}$ folgt unmittelbar, braucht aber nicht weiter hingeschrieben zu werden.

§ 24.

Specielle Discussion des Falles $n = 1$.

Wir wollen wiederum einige Anwendungen der allgemeinen Theorien geben, die in den letzten Paragraphen entwickelt worden sind, und zwar nehmen wir dazu zunächst den Fall $n = 1$.

Wir wollen in diesem Falle setzen:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{\tau}{2},$$

dann nimmt die zu untersuchende Function die Gestalt an:

$$1)\qquad \frac{\vartheta_0\left(v - \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_0\left(v + \frac{\tau}{2}\right)\vartheta_0(v)} = \frac{\vartheta_3(v)\, e^{\pi i v} . q^{\frac{1}{4}}}{i . \vartheta_1(v)\, \vartheta_0(v)}.$$

Vermöge der angegebenen Methoden haben wir die folgenden Ausdrücke zu bilden:

$$2)\qquad \varphi(v) = -\frac{e^{\pi i v}}{2i} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{q^{m^2}}{\sin\pi(v - m\tau)},$$

$$3)\qquad R = \frac{q^{\frac{1}{4}} . \vartheta_3}{i . \vartheta'_1 . \vartheta_0}.$$

Das Product dieser beiden Grössen nimmt die Form an:

$$R . \varphi(v) = \frac{e^{\pi i v} . q^{\frac{1}{4}} . \vartheta_3}{2\vartheta'_1 . \vartheta_0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{q^{m^2}}{\sin\pi(v - m\tau)}.$$

Ferner haben wir die Grössen zu bilden:

$$4)\qquad \varphi_0(v) = -\frac{1}{2i} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{q^{m(m+1)-\frac{1}{2}} . e^{\pi i v}}{\sin\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$5)\qquad R_0 = -\frac{q . \vartheta_2}{i\, \vartheta'_1 . \vartheta_0}.$$

Das Product dieser beiden Grössen nimmt die Form an:

$$6)\qquad R_0 . \varphi_0(v) = -\frac{e^{\pi i v} . q^{\frac{1}{4}} . \vartheta_2}{2\vartheta'_1 . \vartheta_0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{q^{m^2+m+\frac{1}{4}}}{\sin\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}.$$

Die Ausdrücke für $R . \varphi(v)$ und $R_0 . \varphi_0(v)$ sind zu addiren und ihre Summe mit $-2\pi i$ zu multipliciren, so erhalten wir die gesuchte Darstellung und zwar in der Form:

$$7)\quad \frac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)} = \pi\left(\vartheta_3 \sum \frac{q^{m^2}}{\sin\pi(v - m\tau)} - \vartheta_2 \sum \frac{q^{m^2+m+\frac{1}{4}}}{\sin\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}\right).$$

Die Summen sind nach m von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen. Auch diese Formel findet sich schon in der Biehler'schen Arbeit.

Wir setzen zweitens:

$$a = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}, \quad b = -\frac{\tau}{2},$$

so nimmt unsere Primfunction die Gestalt an:

$$8)\quad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\,\vartheta_0(v)} = \frac{\vartheta_2(v)}{i\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_0(v)}.$$

Zu ihrer Darstellung haben wir die folgenden Ausdrücke zu bilden. Erstens nimmt $\varphi(v)$ die Form an:

$$9\text{a})\quad \varphi(v) = -\frac{1}{2i} \sum \frac{q^{m^2} e^{\pi i (v - m\tau)}}{\sin\pi(v - m\tau)}$$

oder auch:

$$9\text{b})\quad \varphi(v) = -\frac{1}{2i} \sum q^{m^2}.\operatorname{cotang}\pi(v - m\tau) - \frac{1}{2}\sum q^{m^2}.$$

Zweitens erhalten wir für R den Ausdruck:

$$10)\quad R = \frac{\vartheta_2}{i \cdot \vartheta'_1 \cdot \vartheta_0}.$$

Unter solchen Umständen nimmt das Product der beiden soeben betrachteten Grössen die Form an:

$$11)\quad R.\varphi(v) = \frac{\vartheta_2}{2\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0} \sum q^{m^2}.\operatorname{cotang}\pi(v - m\tau) - \frac{1}{2i}\frac{\vartheta_2 \cdot \vartheta_3}{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0}.$$

Analog wird:

$$12\text{a})\quad \varphi_0(v) = -\frac{1}{2i} \sum \frac{q^{m^2+m}.e^{\pi i \left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}}{\sin\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}$$

oder auch:

$$12\text{b})\quad \varphi_0(v) = -\frac{1}{2i} \sum q^{m^2+m}.\operatorname{cotang}\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right) - \frac{1}{2}\sum q^{m^2+m},$$

während R_0 die Form annimmt:

$$13)\quad R_0 = -\frac{q^{\frac{1}{4}} \cdot \vartheta_3}{i\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0}.$$

Für dies Product der beiden Grössen erhalten wir demgemäss:

$$14)\quad \left\{\begin{aligned} R_0 \cdot \varphi_0(v) = -\frac{1}{2}\,\frac{\vartheta_3}{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0} \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}} \operatorname{cotang}\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right) \\ + \frac{1}{2i}\,\frac{\vartheta_2 \cdot \vartheta_3}{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0}. \end{aligned}\right.$$

Addiren wir die beiden gefundenen Ausdrücke und multipliciren die Summe mit $-2\pi i$, so ergiebt sich die Entwickelung:

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_2 \sum q^{m^2}.\, cotg\,\pi(v-m\tau) - \vartheta_2 \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\, cotg\,\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right)\right]. \end{cases}$$

In ganz analoger Weise sind die zehn analogen Quotienten zu bilden. Wir erhalten die folgenden Resultate:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_0(v)}{\vartheta_3(v)\vartheta_2(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_3 \sum q^{m^2}.\, sec\,\pi(v-m\tau) - \vartheta_2 \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\, sec\,\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right)\right], \end{cases}$$

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_1(v)}{\vartheta_3(v)\vartheta_2(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_2 \sum q^{m^2}.\, tang\,\pi(v-m\tau) - \vartheta_3 \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\, tang\,\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right)\right], \end{cases}$$

$$18)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_3 \cdot \vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_0 \sum q^{m^2}.\, cosec\,\pi(v-m\tau) + \vartheta_2 \sum (-1)^m i\, q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\, sec\,\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right)\right], \end{cases}$$

$$19)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_3 \cdot \vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)\vartheta_2(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_0 \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\, cotang\,\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right) + \vartheta_2 \sum (-1)^m q^{m^2}.\, tang\,\pi(v-m\tau)\right], \end{cases}$$

$$20)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_3 \cdot \vartheta_3(v)}{\vartheta_2(v)\vartheta_0(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_0 \sum q^{m^2}.\, sec\,\pi(v-m\tau) + \vartheta_2 \sum (-1)^{m-1} i\, q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\, cosec\,\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right)\right], \end{cases}$$

$$21)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'_1 \cdot \vartheta_3 \cdot \vartheta_2(v)}{\vartheta_3(v)\vartheta_1(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_0 \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\, tang\,\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right) + \vartheta_2 \sum (-1)^m q^{m^2}.\, cotang\,\pi(v-m\tau)\right], \end{cases}$$

$$22)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2 \cdot \vartheta'_1 \cdot \vartheta_0(v)}{\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)} \\ = \pi\left(\vartheta_0 \sum q^{m^2}.\, cotg\,\pi(v-m\tau) + \vartheta_3 \sum (-1)^m q^{m^2}.\, tang\,\pi(v-m\tau)\right), \end{cases}$$

$$23)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2 \,.\, \vartheta'_1 \,.\, \vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)\vartheta_3(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_0 \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\operatorname{cosec}\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right) + \vartheta_3 \sum (-1)^m i.q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\sec\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right)\right], \end{cases}$$

$$24)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2 \,.\, \vartheta'_1 \,.\, \vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)} \\ = \pi\left(\vartheta_0 \sum q^{m^2}.\operatorname{tang}\pi(v - m\tau) + \vartheta_3 \sum (-1)^m q^{m^2}.\operatorname{cotang}\pi(v - m\tau)\right), \end{cases}$$

$$25)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_2 \,.\, \vartheta'_1 \,.\, \vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)\vartheta_3(v)} \\ = \pi\left[\vartheta_0 \sum q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\sec\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right) + \vartheta_3 \sum (-1)^{m+1} i.q^{m^2+m+\frac{1}{4}}.\operatorname{cosec}\pi\left(v - \dfrac{2m+1}{2}\tau\right)\right]. \end{cases}$$

Alle diese Entwickelungen sind schon von Biehler gegeben worden. Die Summen sind sämmtlich nach m von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen.

Es ist nicht schwer, für eben dieselben Functionen noch andere Darstellungen, vor allem in der Form von Doppelsummen zu geben, wir sehen aber von ihnen ab, indem wir in Bezug hierauf auf die Biehler'sche Arbeit verweisen.

§ 25.

Specielle Discussion des Falles $n = 2$.

Wir wollen jetzt zweitens $n = 2$ setzen und auch für diesen Fall eine Anzahl wichtiger Formeln ableiten.

Setzen wir dazu zunächst:

$$a = b.$$

Für diesen Fall wird $R = 0$, sodass die Function $\varphi(v)$ nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Ferner wird:

$$1)\qquad \varphi_0(v) = \sum \frac{(-1)^m q^{2m(m+1)} . e^{2\pi i v}}{q^{2m+1} - e^{2\pi i v}},$$

$$2)\qquad \varphi_1(v) = \sum \frac{(-1)^{m+1} q^{2m(m+1)} . e^{2\pi i v}}{q^{2m+1} + e^{2\pi i v}}.$$

Die entsprechenden Grössen R nehmen die Form an:

$$3)\qquad R_0 = R_1 = \frac{1}{2i}\,\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\theta'_1}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{2i.q^{-\frac{1}{2}}.\theta'_1}{\vartheta_0(2v,2\tau)} \\ = -2\pi i\left(\sum\dfrac{(-1)^m q^{2m(m+1)}.e^{2\pi i v}}{q^{2m+1}-e^{2\pi i v}}+\sum\dfrac{(-1)^{m+1}q^{2m(m+1)}.e^{2\pi i v}}{q^{2m+1}+e^{2\pi i v}}\right). \end{cases}$$

Wir wollen die zweite Summe für sich betrachten.

Es ist:

$$q^{2m+1}+e^{2\pi i v} = 2e^{\pi i v}.q^{\frac{2m+1}{2}} \cos\pi\left(v-\frac{2m+1}{2}\tau\right).$$

Unter solchen Umständen nimmt die zweite Summe die Form an:

$$\frac{1}{2}\sum\frac{(-1)^{m+1}q^{2m(m+1)}.e^{\pi i\left(v-\frac{2m+1}{2}\tau\right)}}{\cos\pi\left(v-\frac{2m+1}{2}\tau\right)}$$

oder auch die Form:

$$\frac{i}{2}\sum(-1)^{m+1}q^{2m(m+1)}.\operatorname{tang}\pi\left(v-\frac{2m+1}{2}\tau\right).$$

Ganz analog nimmt die erste Summe die Form an:

$$-\frac{i}{2}\sum(-1)^{m+1}q^{2m(m+1)}.\operatorname{cotang}\pi\left(v-\frac{2m+1}{2}\tau\right).$$

Unter Aenderung des Summationsbuchstabens erhalten wir demgemäss:

$$\begin{cases} \dfrac{2\theta'_1}{\vartheta_0(2v,2\tau)} \\ = \pi i q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^m q^{2m(m-1)}\left[\operatorname{cotang}\pi\left(v-\dfrac{2m-1}{2}\tau\right)-\operatorname{tang}\pi\left(v-\dfrac{2m-1}{2}\tau\right)\right]. \end{cases}$$

Nun ist aber nach bekannten Formeln der quadratischen Transformation:

$$\frac{2\theta'_1}{\vartheta_0(2v,2\tau)} = \frac{2\theta'_1.\theta_0}{\vartheta_0(v,\tau)\,\vartheta_3(v,\tau)} = \frac{2\pi\theta_0{}^2.\theta_2.\theta_3}{\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v)} = \frac{\pi\vartheta_0.\vartheta_3.\vartheta_2{}^2}{\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v)} = \frac{\vartheta_2.\vartheta'_1}{\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v)}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta_2.\vartheta'_1}{\vartheta_0(v)\,\vartheta_3(v)} \\ = \pi i q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^m q^{2m(m-1)}\left[\operatorname{cotang}\pi\left(v-\dfrac{2m-1}{2}\tau\right)-\operatorname{tang}\pi\left(v-\dfrac{2m-1}{2}\tau\right)\right]. \end{cases}$$

Da nun schliesslich die Beziehung gilt:

$$\operatorname{cotang}\alpha-\operatorname{tang}\alpha = 2\operatorname{cotang}2\alpha,$$

so ergiebt sich die einfache Darstellung:

$$5)\quad \frac{\vartheta_2.\vartheta'_1}{\vartheta_0(v).\vartheta_3(v)} = 2\pi i q^{\frac{1}{2}}\sum(-1)^m q^{2m(m-1)}.\operatorname{cotang}2\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right).$$

Es findet sich diese Formel in den citirten Arbeiten von Appell.

Wir setzen zweitens:

$$a = 0, \quad b = \frac{\tau}{2},$$

so nimmt die zu betrachtende Function die Form an:

$$6) \qquad \frac{\vartheta_0(v-a)}{\vartheta_0(v-b)\,\vartheta_0(2v, 2\tau)} = \frac{e^{\pi i v}.\,q^{\frac{1}{4}}.\,\theta_0}{i.\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v)}.$$

Wir haben wiederum die Functionen $\varphi(v)$ und die entsprechenden Grössen R zu bilden.

Zunächst wird:

$$7a) \qquad \varphi(v) = \sum \frac{(-1)^m q^{2m^2+m}.\,e^{2\pi i v}}{q^{2m} - e^{2\pi i v}}$$

oder also:

$$7b) \qquad \varphi(v) = -\frac{1}{2i}\sum \frac{(-1)^m q^{2m^2}.\,e^{\pi i v}}{\sin\pi(v - m\tau)}.$$

Die entsprechende Grösse R nimmt die Gestalt an:

$$8) \qquad R = \frac{1}{i}\,\frac{q^{\frac{1}{4}}.\,\vartheta_0}{\vartheta'_1.\,\vartheta_0(0, 2\tau)}.$$

Die Grösse R_0 wird der Null gleich, sodass von $\varphi_0(v)$ abzusehen ist. Für die Function $\varphi_1(v)$ erhalten wir den Ausdruck:

$$9a) \qquad \varphi_1(v) = \sum \frac{(-1)^{m+1} q^{2m(m+1)+m}.\,e^{2\pi i v}}{q^{2m+1} + e^{2\pi i v}}$$

oder also:

$$9b) \qquad \varphi_1(v) = \frac{1}{2}\sum \frac{(-1)^{m+1} q^{2m^2+2m-\frac{1}{2}}.\,e^{\pi i v}}{\cos\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}.$$

Für die Grösse R_1 erhalten wir den Ausdruck:

$$10a) \qquad R_1 = \frac{1}{2i}\,\frac{q^{\frac{5}{4}}\,\vartheta_2}{\vartheta_3.\,\theta'_1}$$

oder auch:

$$10b) \qquad R_1 = \frac{1}{i}\,\frac{q^{\frac{5}{4}}.\,\vartheta_0}{\vartheta'_1.\,\theta_0}.$$

Unter solchen Umständen ergiebt sich:

$$11a) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\vartheta'_1.\,\vartheta_0^2}{\vartheta_0.\,\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v)} \\ &= -2\pi i\left(-\frac{1}{2i}\sum\frac{(-1)^m q^{2m^2}}{\sin\pi(v-m\tau)} + \frac{1}{2}\sum\frac{(-1)^{m+1} q^{2m^2+2m+\frac{1}{2}}}{\cos\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}\right).\end{aligned}\right.$$

Wir können diese Formel auch schreiben:

$$11\text{b)}\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_1 . \vartheta_3}{\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)} = \sum \frac{(-1)^m q^{2m^2}}{\sin\pi(v - m\tau)} - i\sum \frac{(-1)^{m+1} q^{2m^2+2m+\frac{1}{2}}}{\cos\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}.$$

Damit ist ein zweiter Quotient in trigonometrische Reihen entwickelt.

Genau so können vier weitere Quotienten behandelt werden. Wir beschränken uns darauf, die entsprechenden Formeln hinzuschreiben.

$$12)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_1 . \vartheta_2}{\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)} = 2\sum \frac{(-1)^m q^{2m^2}}{\sin 2\pi(v - m\tau)},$$

$$13)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_1 . \vartheta_3}{\vartheta_2(v)\vartheta_0(v)} = \sum \frac{(-1)^m q^{2m^2}}{\cos\pi(v - m\tau)} + i\sum \frac{(-1)^{m+1} q^{2m^2+2m+\frac{1}{2}}}{\sin\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$14)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_1 . \vartheta_0}{\vartheta_1(v)\vartheta_0(v)} = \sum \frac{q^{2m^2}}{\sin\pi(v - m\tau)} - \sum \frac{q^{2m^2+2m+\frac{1}{2}}}{\sin\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)},$$

$$15)\quad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_1 . \vartheta_0}{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)} = \sum \frac{q^{2m^2}}{\cos\pi(v - m\tau)} - \sum \frac{q^{2m^2+2m+\frac{1}{2}}}{\cos\pi\left(v - \frac{2m+1}{2}\tau\right)}.$$

In allen diesen Formeln ist die Summation nach m von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen. Dieselben sind von Appell aufgestellt worden.

§ 26.

Entwickelung der Methoden von Appell und Halphen, die doppeltperiodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Wir sind zu unseren Entwickelungen der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art dadurch gekommen, dass wir die Theorie derselben auf die Theorie gewisser Primfunctionen zurückführten und diese in trigonometrische Reihen entwickelten. Bei diesen Entwickelungen machten wir von gewissen Functionen Gebrauch, die zuerst von Appell in voller Allgemeinheit aufgestellt worden sind und zwar gingen wir auf doppeltem Wege vor, indem wir erstens zeigten, dass mit ihrer Hülfe die Darstellung der Primfunctionen in trigonometrische Reihen gegeben werden kann und zweitens zu ihnen auf systematischem Wege gelangten.

Es ist nun klar, dass an und für sich der Durchgang durch die von uns eingeführten Primfunctionen bei den Functionen dritter Art nicht nöthig ist, dass vielmehr bei einer beliebig vorgelegten Function sofort die Appell'schen Functionen eingeführt werden können. In dieser Weise verfährt Halphen auf Grund der Appell'schen Arbeiten in seinem Werke über elliptische Functionen. Es zeichnet diese Halphen'sche Darstellung sich durch eine überaus grosse Einfachheit und Eleganz aus. Wenn wir dennoch zunächst den längeren Weg mit Hülfe der Transformationstheorie gewählt haben, so hat das die folgenden Gründe.

Erstens ist es nach verschiedenen Richtungen hin von der grössten Bedeutung, den Zusammenhang der Theorie der allgemeinen doppeltperiodischen Functionen mit der Transformationstheorie darzulegen. Es kommen für diese Functionen auch noch andere Probleme in Betracht als die Entwickelung in trigonometrische Reihen, z. B. das Problem der Entwickelung in Potenzreihen.

Für die Lösung derartiger Probleme eignen sich unsere Primfunctionen in besonderer Weise, wie am Schlusse des ersten Bandes dieses Werkes gezeigt worden ist, während dasselbe für die Appell-schen Functionen nicht der Fall ist. Aber auch für unser eigentliches Problem giebt die Transformationstheorie in dem Falle, in welchem mehr Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte vorkommen, eine einfache Bestimmung der in Betracht zu ziehenden Constanten, welche neben der Bestimmungsweise von Halphen in seinem Werke und der von Appell in seiner Arbeit im dritten Bande der Annales de l'école normale vielleicht von Interesse sein dürfte.

Ferner aber können mit Hülfe der Appell'schen Functionen zunächst nur die Functionen dritter Art entwickelt werden. Für die Functionen zweiter Art versagt die Methode, wie aus den früheren und den folgenden Betrachtungen dieses Paragraphen klar ist. Die Theorie derselben kann nicht unmittelbar auf die Theorie derjenigen Functionen zurückgeführt werden, die aus der Appell'schen durch entsprechende Specialisirung von n entstehen. Demgemäss wird in dem Halphen'schen Werke die Theorie der Functionen zweiter und dritter Art in gesonderter Weise dargestellt, während sie bei uns unter demselben Gesichtspunkt erscheint.

Endlich ist es innerhalb gewisser Grenzen möglich, unsere Primfunctionen auch für den Fall von periodischen Functionen von mehr als einer Veränderlichen zu verallgemeinern.

Diese Gründe haben zu der vorhergehenden Darstellung geführt.

Bei der grossen Einfachheit und Eleganz der Appell'schen Methode möge dieselbe kurz charakterisirt werden. Dieselbe bezieht sich, wie bemerkt, nur auf Functionen dritter Art.

Es ergeben sich die folgenden Resultate:

Die Function:

$$F(v, v_1) = \sum (-1)^{n \cdot m} \frac{e^{2\pi i m n v} \cdot q^{mn(m-1)} \cdot e^{2\pi i v_1}}{e^{2\pi i v} \cdot q^{2m} - e^{2\pi i v_1}} \tag{1}$$

leistet als Function von v betrachtet den Gleichungen Genüge:

$$\begin{cases} F(v+1, v_1) = F(v, v_1) \\ F(v+\tau, v_1) = (-1)^n e^{-2\pi i n v} \cdot F(v, v_1). \end{cases} \tag{2}$$

Als Function von v_1 betrachtet ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{cases} F(v, v_1 + 1) = F(v, v_1), \\ F(v, v_1 + \tau) = (-1)^n e^{2\pi i n v_1} \cdot F(v, v_1) + S, \\ \qquad S = \sum_0^{n-1}{}_r (-1)^{n-r} e^{2\pi i (n-r) v_1} \cdot E_r(v), \\ \qquad E_r(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^{mn+r} e^{2\pi i (mn+r) v} q^{mn(m-\ )+2mr}. \end{cases} \tag{3}$$

Mit Hülfe der Thetafunctionen können wir die letzten Functionen auch schreiben:

$$E_r(v) = (-1)^r e^{2\pi i r v} \cdot \vartheta_0\left[n\left(v - \frac{\tau}{2}\right) + r\tau + \frac{n+1}{2}, n\tau\right].$$

Hieraus ergeben sich dann die folgenden Sätze:

I. Alle Functionen dritter Art des Argumentes v, welche den Gleichungen Genüge leisten:

$$f(v+1) = f(v)$$
$$f(v+\tau) = (-1)^n e^{-2\pi i n v} f(v)$$

und die einfachen Unendlichkeitspunkte besitzen

$$v = v_1^{(\alpha)}$$

— abgesehen von Vielfachen von Perioden — lassen sich in der Form darstellen:

$$f(v) = \lambda_0 \cdot E_0(v) + \lambda_1 \cdot E_1(v) + \cdots \lambda_{n-1} \cdot E_{n-1}(v) + \sum R \cdot F(v, v_1),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über v_1, gleich sämmtlichen $v_1^{(\alpha)}$ zu erstrecken ist. Die Grössen λ und R sind unabhängig von v.

II. Alle Functionen dritter Art des Argumentes v_1, welche den Gleichungen Genüge leisten:

$$f(r_1 + 1) = f(r_1),$$
$$f(r_1 + \tau) = (-1)^n e^{2\pi i n r_1} f(r_1)$$

und die einfachen Unendlichkeitspunkte besitzen:

$$r_1 = r^{\alpha}$$

lassen sich in der Form darstellen:

$$f(r_1) = \sum R \,.\, F(r, r_1),$$

wobei die Summe auf der rechten Seite über r gleich sämmtlichen r^{α_1} zu erstrecken ist. Die Grössen R sind unabhängig von r_1.

Die Bestimmung der Grössen R erfolgt in beiden Fällen in einfacher Weise durch Entwickelung beider Seiten um die einzelnen Unendlichkeitspunkte. Ueber die Bestimmung der Grössen λ ist das Nothwendige bereits bemerkt worden.

Der erste Fall umfasst dann alle Functionen, bei welchen die Zahl der Nullpunkte grösser ist als die Zahl der Unendlichkeitspunkte, der zweite Fall alle diejenigen, bei welchen mehr Unendlichkeitspunkte als Nullpunkte existiren.

Schliesslich möge bemerkt werden, dass die Functionen $F(r, r_1)$ sich bei der Halphen'schen Darstellung als specieller Fall einer allgemeineren Function ergeben, nämlich der Function:

$$4) \qquad \psi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \, x^{mn} \,.\, q^{mn(m-1)} \,.\, \theta(xq^{2n}), \qquad x = -e^{2\pi i r},$$

bei welcher $\theta(z)$ eine willkürliche Function von z bedeutet, die nur gewissen leicht angebbaren Bedingungen Genüge leistet.

§ 27.

Untersuchung des Falles mehrfacher Unendlichkeitspunkte. Beispiele hierzu.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir stets angenommen, dass die in Betracht kommenden Unendlichkeitspunkte einfache seien. Im ersten Bande (§ 81) ist angedeutet worden, wie in dem Falle mehrfacher Unendlichkeitspunkte zu verfahren ist. In diesem Falle treten zu den gefundenen Primfunctionen noch deren Differentialquotienten nach gewissen Grössen hinzu. Sind die Functionen zweiter Art vorgelegt, so gestaltet sich die Untersuchung, wie an der genannten Stelle gezeigt worden ist, so übersichtlich und einfach, dass wir füglich von ihr absehen können. Auf den Fall der Functionen dritter

Art wollen wir etwas näher eingehen, aber hier bei der Appell'schen Darstellung bleiben, da dieselbe sich als besonders elegant zeigt. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass bei den von uns gebrauchten Primfunctionen ganz analog verfahren werden kann.

Die Resultate gestalten sich nun folgendermaassen:

I. Sind mehr Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte vorhanden, so tritt an Stelle der Summe:

$$\sum R \,.\, F(v, v_1),$$

die Summe:

$$\sum R_0 \,.\, F(v, v_1) + R_1 \cdot \frac{\partial F(v, v_1)}{\partial v_1} + \cdots \quad R_{p-1} \cdot \frac{\partial^{p-1} F(v, v_1)}{\partial {v_1}^{p-1}},$$

wobei die Summe genau so zu nehmen ist, wie im Falle der einfachen Unendlichkeitspunkte, wo überdies p den Grad der Vielfachheit des entsprechenden Unendlichkeitspunktes bedeutet.

II. Sind mehr Unendlichkeitspunkte als Nullpunkte vorhanden, so tritt an Stelle von:

$$\sum R \,.\, F(v, v_1)$$

der Ausdruck:

$$\sum R_0 \,.\, F(v, v_1) + R_1 \frac{\partial F(v, v_1)}{\partial v} + \cdots \quad R_{p-1} \frac{\partial F(v, v_1)}{\partial v^{p-1}},$$

wobei in Bezug auf die Summe und die Zahl p genau das Analoge gilt wie vorhin.

Die Grössen R sind durch Entwickelung um die entsprechenden Unendlichkeitspunkte bestimmt. Wir wollen diese Regeln auf zwei Fälle anwenden. Zunächst wollen wir die Quotienten ins Auge fassen:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta^2_\beta(v)}.$$

Als Repräsentant derselben nehmen wir den Quotienten:

$$\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta^2_3(v)}.$$

Als Function von v betrachtet, leistet derselbe den Gleichungen Genüge:

1) $$f(v+1) = f(v),$$

2) $$f(v+\tau) = - e^{\pi i(2v+\tau)} \,.\, f(v).$$

Von Perioden abgesehen, besitzt der Ausdruck einen einzigen Unendlichkeitspunkt und zwar den Punkt:

$$v = -\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}.$$

Dieser Unendlichkeitspunkt ist ein doppelter. Die Entwickelung um denselben ist leicht zu vollführen. In der That, setzen wir:

$$v = w - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2},$$

so folgt:

$$\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta^2_0(v)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}\left(2w+\frac{\tau}{2}\right)} \cdot \vartheta_2(w)}{\vartheta^2_1(w)},$$

oder also:

$$\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta^2_3(v)} = -q^{\frac{1}{4}} \frac{(1 + \pi i w + \cdots)\left(\vartheta_2 + \frac{w^2 \vartheta''_2}{1\,.\,2} + \cdots\right)}{w^2 . \vartheta'^2_1},$$

oder auch:

$$\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta^2_3(v)} = -\frac{q^{\frac{1}{4}} . \vartheta_2}{\vartheta'^2_1} \frac{1}{w^2} - \frac{q^{\frac{1}{4}} . \pi i \vartheta_2}{\vartheta'^2_1} \frac{1}{w} + \cdots$$

Die Appell'sche Function lautet nun für $n = 1$:

$$3) \qquad \sum \frac{(-1)^m x^m . q^{m(m-1)} . y}{x . q^{2m} - y},$$

wenn wir uns an Stelle von v und v_1 gesetzt denken u und v und ferner die Bezeichnung einführen:

$$x = e^{2\pi i u}, \quad y = e^{2\pi i v}.$$

Der Differentialquotient derselben nach u lautet von einem constanten Factor abgesehen:

$$\sum \frac{(-1)^m m . x^m . q^{m(m-1)} . y}{x . q^{2m} - y} - \sum \frac{(-1)^m x^{m+1} . q^{m(m-1)} . y . q^{2m}}{(x . q^{2m} - y)^2}.$$

In diese Ausdrücke haben wir nach unseren allgemeinen Sätzen zu setzen an Stelle

von y: $y . q$,

von x: -1.

Auf diesem Wege erhalten wir die Darstellung:

$$4) \quad -\frac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_3^2(v)} = \sum \frac{q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} . y}{q^{2m-1} + y} (c_1 - m c_2) + c_2 \sum \frac{q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} . q^{2m-1} . y}{(q^{2m-1} + y)^2}.$$

Die erste Summe auf der rechten Seite können wir schreiben:

$$\frac{1}{2} \sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} (c_1 - m c_2) + \frac{i}{2} \sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} (c_1 - m c_2)\, tang\, \pi\left(v - \frac{2m-1}{2}\tau\right)$$

die zweite nimmt die Form an:

$$c_2 \sum \frac{q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}}{4 \cos^2 \pi\left(v - \frac{2m-1}{2}\tau\right)}.$$

Die beiden Constanten sind durch Entwickelung um den Unendlichkeitspunkt unmittelbar bestimmt und zwar wird:

$$c_2 = 4\pi^2, \quad c_1 = 2\pi^2,$$

oder also wir erhalten die Darstellung:

$$5) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_3^2(v)} &= i\sum(2m-1)q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\,tang\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right) \\ &-\sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\,sec^2\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right). \end{aligned} \right.$$

Ganz genau so sind die übrigen 11 Quotienten zu untersuchen. Wir erhalten die Resultate:

$$6) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_2^2(v)} &= -2i\sum m q^{m^2}.\,sec\,\pi(v-m\tau) \\ &+\sum q^{m^2}.\,tang\,\pi(v-m\tau)\,sec\,\pi(v-m\tau), \end{aligned} \right.$$

$$7) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0^2(v)} &= -i\sum(2m-1)q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\,cotang\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right) \\ &-\sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\,cosec^2\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right). \end{aligned} \right.$$

$$8) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1^2(v)} &= 2i\sum m q^{m^2}.\,cosec\,\pi(v-m\tau) \\ &+\sum q^{m^2}.\,cotang\,\pi(v-m\tau).\,cosec\,\pi(v-m\tau), \end{aligned} \right.$$

$$9) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_2^2(v)} &= -2i\sum m q^{m^2}.\,tang\,\pi(v-m\tau) \\ &+\sum q^{m^2}.\,sec^2\pi(v-m\tau), \end{aligned} \right.$$

$$10) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_3^2(v)} &= i\sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.(2m-1)\,sec\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right) \\ &-\sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\,tang\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right)sec\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right), \end{aligned} \right.$$

$$11) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_1^2(v)} &= 2i\sum m q^{m^2}.\,cotang\,\pi(v-m\tau) \\ &+\sum q^{m^2}.\,cosec^2\pi(v-m\tau), \end{aligned} \right.$$

$$12) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0^2(v)} &= -i\sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.(2m-1)\,cosec\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right) \\ &-\sum q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\,cotang\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right)cosec\,\pi\left(v-\frac{2m-1}{2}\tau\right), \end{aligned} \right.$$

$$
13)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0}\dfrac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_1^2(v)} = 2i\sum(-1)^m m q^{m^2}.\, cotang\,\pi(v - m\tau) \\ \qquad + \sum(-1)^m q^{m^2}.\, cosec^2\pi(v - m\tau), \end{cases}
$$

$$
14)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0}\dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0^2(v)} = \sum(-1)^{m+1}(2m-1)q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\, cosec\,\pi\left(v - \dfrac{2m-1}{2}\tau\right) \\ + i\sum(-1)^m q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\, cotang\,\pi\left(v - \dfrac{2m-1}{2}\tau\right) cosec\,\pi\left(v - \dfrac{2m-1}{2}\tau\right), \end{cases}
$$

$$
15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0}\dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_2^2(v)} = 2i\sum(-1)^{m+1} m q^{m^2}.\, tang\,\pi(v - m\tau) \\ \qquad + \sum(-1)^m q^{m^2}.\, sec^2\pi(v - m\tau), \end{cases}
$$

$$
16)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0}\dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_3^2(v)} = \sum(-1)^{m+1}(2m-1)q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} sec\,\pi\left(v - \dfrac{2m-1}{2}\tau\right) \\ + i\sum(-1)^{m+1} q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}.\, tang\,\pi\left(v - \dfrac{2m-1}{2}\tau\right) sec\,\pi\left(v - \dfrac{2m-1}{2}\tau\right). \end{cases}
$$

Auch diese Formeln finden sich schon in der mehrfach citirten Arbeit von Biehler.

Die Summen sind sämmtlich nach m von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen.

Wir wollen schliesslich noch die Quadrate der reciproken Thetafunctionen in Betracht ziehen. Als Repräsentant derselben nehmen wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{\vartheta_0^2(v)}.$$

Als Function von v betrachtet, leistet derselbe den Gleichungen Genüge:

$$17)\qquad f(v+1) = f(v),$$

$$18)\qquad f(v+\tau) = e^{2\pi i(2v+\tau)}.f(v).$$

Von Perioden abgesehen, besitzt der Ausdruck einen einzigen Unendlichkeitspunkt und zwar den Punkt:

$$v = \frac{\tau}{2}.$$

Dieser Unendlichkeitspunkt ist ein doppelter. Die Entwickelung um denselben ist leicht zu vollführen.

In der That setzen wir:

$$v = w + \frac{\tau}{2},$$

so folgt:

$$\frac{1}{\vartheta_0^2(v)} = -\frac{q^{\frac{1}{2}}.e^{2\pi i w}}{\vartheta_1^2(w)}$$

oder also wir erhalten die Entwickelung:

$$19)\qquad \frac{1}{\vartheta_0^2(v)} = -\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\vartheta_1'^2}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{2\pi i}{w} + \cdots\right).$$

Wir haben nun hier die Function in Betracht zu ziehen:

$$20)\qquad \sum \frac{x^{2m}.q^{2m(m-1)}.y}{x.q^{2m}-y},$$

wobei dieselben Bezeichnungen gebraucht worden sind, wie bei den vorangehenden Beispielen.

Bilden wir den Differentialquotienten dieser Function nach u, setzen sodann $x = 1$, ferner an Stelle von y: yq, so erhalten wir analog wie vorhin die Darstellung:

$$21)\qquad -\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2(v)} = \sum \frac{(c_1 - 2mc_2)q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}.y}{q^{2m-1}-y} + c_2\sum \frac{q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}.y.q^{2m-1}}{(q^{2m-1}-y)^2}.$$

Die erste Summe kann geschrieben werden:

$$\frac{i}{2}\sum(c_1 - 2mc_2)q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}.y^{\frac{1}{2}}.q^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)}.\operatorname{cosec}\pi\left(v - \frac{2m-1}{2}\tau\right),$$

oder auch:

$$\begin{cases} \frac{i}{2}\sum(c_1 - 2mc_2)q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}\operatorname{cotang}\pi\left(v - \frac{2m-1}{2}\tau\right) \\ \qquad -\frac{i}{2}\sum(c_1 - 2mc_2)q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}. \end{cases}$$

Die zweite Summe nimmt die Form an:

$$-\frac{c_2}{4}\sum q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}.\operatorname{cosec}^2\pi\left(v - \frac{2m-1}{2}\tau\right).$$

Durch Entwickelung um den Unendlichkeitspunkt herum ergiebt sich:

$$c_1 = -4\pi^2, \quad c_2 = -4\pi^2,$$

oder also wir erhalten die Darstellung:

$$22)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_0^2(v)} = -2i\sum(2m-1)q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}.\operatorname{cotang}\pi\left(v - \frac{2m-1}{2}\tau\right) \\ \qquad -\sum q^{\frac{1}{2}(2m-1)^2}.\operatorname{cosec}^2\pi\left(v - \frac{2m-1}{2}\tau\right). \end{cases}$$

Ganz analog folgt:

$$23)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\vartheta'^2_1}{\vartheta_1^2(v)} = 4i\sum m\,.\,q^{2m^2}.\,cotang\,\pi(v - m\tau) \\ \qquad\qquad + \sum q^{2m^2}.\,cosec^2\pi\,(v - m\tau). \end{cases}$$

Die beiden fehlenden Quotienten entstehen aus den betrachteten, indem an Stelle von v links und rechts $v + \frac{1}{2}$ gesetzt wird. Diese Formeln sind von Hermite zuerst aufgestellt und von Appell in den citirten Arbeiten veröffentlicht.

§ 28.

Die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen erster Art in trigonometrische Reihen.

Die doppeltperiodischen Functionen erster Art lassen sich, wie in § 82 des ersten Bandes nachgewiesen worden ist, sämmtlich aus den Functionen:

$$\frac{\vartheta'_\alpha(v-a)}{\vartheta_\alpha(v-a)}$$

und deren Differentialquotienten nach v zusammensetzen. Für unsere Betrachtungen sind wir dabei vollkommen berechtigt $a = 0$ zu setzen. Von den doppeltperiodischen Functionen zweiter Art ausgehend, kommt man zu den genannten Functionen durch einen Grenzübergang und so müssten auch aus den gefundenen Formeln sich durch Grenzübergänge die trigonometrischen Entwickelungen der soeben genannten Primfunctionen ableiten lassen. Es soll dieser Weg hier nicht eingeschlagen werden, vielmehr wollen wir auf directem Wege und zwar nach zweierlei Methoden die Functionen

$$\frac{\vartheta'_\alpha(v)}{\vartheta_\alpha(v)}$$

in trigonometrische Reihen entwickeln. Der erste Weg ist schon von Jacobi eingeschlagen worden.

Wir beschränken uns bei der Ableitung auf den Fall $\alpha = 0$.

Für diesen Fall ist:

$$1)\quad \vartheta_0(v) = \prod(1 - q^{2n})\prod(1 - 2q^{2n-1}.\,cos\,2\pi v + q^{4n-2}).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{cases} log\,\vartheta_0(v) = log\prod(1 - q^{2n}) + \sum log(1 - q^{2n-1}.\,e^{2\pi i v}) \\ \qquad\qquad + \sum log(1 - q^{2n-1}.\,e^{-2\pi i v}). \end{cases}$$

Nun gelten aber, so lange die Ungleichungen bestehen:

$$|q^{2n-1}e^{\pm 2\pi i v}| < 1$$

die Entwickelungen:

$$log(1 - q^{2n-1}.e^{2\pi i v}) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{q^{(2n-1)m}.e^{2\pi i m v}}{m},$$

$$log(1 - q^{2n-1}.e^{-2\pi i v}) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{q^{(2n-1)m}.e^{-2\pi i m v}}{m}.$$

Aus diesen Entwickelungen folgt:

$$log\,\vartheta_0(v) = log\prod(1 - q^{2n}) - 2\sum_1^\infty{}_n \sum_1^\infty{}_m \frac{q^{(2n-1)m}.cos\,2m\pi v}{m},$$

oder wie sich durch Umkehrung der Summationsordnung ergiebt:

$$2)\qquad log\,\vartheta_0(v) = log\prod(1 - q^{2n}) - 2\sum_1^\infty{}_m \frac{q^m.cos\,2m\pi v}{m(1 - q^{2m})}.$$

Genau so folgt:

$$3)\qquad log\,\vartheta_3(v) = P - 2\sum\frac{(-1)^m q^m.cos\,2m\pi v}{m(1 - q^{2m})},$$

$$4)\qquad log\,\vartheta_1(v) = P + log\left(2q^{\frac{1}{4}}.sin\,\pi v\right) - 2\sum\frac{q^{2m}.cos\,2m\pi v}{m(1 - q^{2m})},$$

$$5)\qquad log\,\vartheta_2(v) = P + log\left(2q^{\frac{1}{4}}.cos\,\pi v\right) - 2\sum\frac{(-1)^m q^{2m}.cos\,2m\pi v}{m(1 - q^{2m})},$$

wobei gesetzt ist:

$$P = log\prod(1 - q^{2n})$$

und die Summen nach m von 1 bis ∞ zu nehmen sind.

Durch Differentiation erhalten wir hieraus die Darstellungen:

$$6)\qquad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_0(v)}{\vartheta_0(v)} = 4\sum\frac{q^m.sin\,2m\pi v}{1 - q^{2m}},$$

$$7)\qquad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_3(v)}{\vartheta_3(v)} = 4\sum\frac{(-1)^n q^m.sin\,2m\pi v}{1 - q^{2m}},$$

$$8)\qquad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)} = cotang\,\pi v + 4\sum\frac{q^{2m}.sin\,2m\pi v}{1 - q^{2m}},$$

$$9)\qquad \frac{1}{\pi}\frac{\vartheta'_2(v)}{\vartheta_2(v)} = -tang\,\pi v + 4\sum\frac{(-1)^m q^{2m}.sin\,2m\pi v}{1 - q^{2m}}.$$

Zu denselben Resultaten gelangt man auch durch die folgenden Erwägungen.

Jedenfalls können wir die Ansätze machen:

$$\text{10)} \qquad \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta'_0(v)}{\vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m \,.\, e^{2m\pi i v},$$

$$\text{11)} \qquad \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)} = cotang\,\pi v + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m B_m \,.\, e^{2m\pi i v}.$$

Nun ist:

$$\vartheta_1\left(v - \frac{\tau}{2}\right) = -\, i q^{-\frac{1}{4}} \,.\, e^{\pi i v} \,.\, \vartheta_0(v),$$

also:

$$\frac{\vartheta'_1\left(v - \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v - \frac{\tau}{2}\right)} = \pi i + \frac{\vartheta'_0(v)}{\vartheta_0(v)}.$$

Andererseits wird:

$$cotang\,\pi\left(v - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{i e^{-\pi i v} \,.\, q^{\frac{1}{2}} \left(e^{\pi i v} \,.\, q^{-\frac{1}{2}} + e^{-\pi i v} \,.\, q^{\frac{1}{2}}\right)}{1 - q e^{-2\pi i v}},$$

oder also:

$$cotang\,\pi\left(v - \frac{\tau}{2}\right) = i(1 + 2q \,.\, e^{-2\pi i v} + 2q^2 \,.\, e^{-4\pi i v} + \cdots).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\vartheta'_1\left(v - \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v - \frac{\tau}{2}\right)} = i(1 + 2q.e^{-2\pi i v} + 2q^2.e^{-4\pi i v} + \cdots) + \sum B_m.q^{-m}.e^{2m\pi i v}.$$

Andererseits ist derselbe Ausdruck gleich:

$$i + \sum A_m \,.\, e^{2m\pi i v}.$$

Durch Vergleichung ergiebt sich für $m = 0$:

$$A_0 = B_0$$

für positive Werthe von m:

$$A_m = B_m \,.\, q^{-m},$$

$$A_{-m} = 2iq^m + B_{-m} \,.\, q^m.$$

Nun finden aber offenbar die Beziehungen statt:

$$A_{-m} = -A_m, \quad B_{-m} = -B_m,$$

also folgt:

$$A_m = -2i \,.\, q^m - B_{-m} \,.\, q^m = -2iq^m - A_{-m} \,.\, q^{2m},$$

oder also wir erhalten für A_m den Ausdruck:

$$\text{12)} \qquad A_m = -2i \frac{q^m}{1 - q^{2m}}.$$

Damit haben wir die früheren Resultate wiedergefunden.

Mit Hülfe dieser Darstellungen können nun die sämmtlichen doppeltperiodischen Functionen erster Art in trigonometrische Reihen entwickelt werden. Da die wichtigsten Beispiele hierfür schon im ersten Bande — wenn auch auf anderem Wege — abgeleitet worden sind, so wollen wir uns begnügen, die Reihenentwickelung für $sn^2 u$ anzugeben. Bekanntlich ist:

$$\left(\frac{2\varkappa K}{\pi}\right)^2 sn^2 u = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - \frac{d^2 \log \vartheta_0(v)}{dv^2}.$$

Hieraus folgt dann die Darstellung:

$$\left(\frac{2\varkappa K}{\pi}\right)^2 sn^2 u = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} - 8\sum \frac{m q^m . \cos 2 m \pi v}{1 - q^{2m}}. \tag{13}$$

Die Entwickelung der Functionen $cn^2 u$ und $dn^2 u$ folgt vermöge der Formeln:

$$sn^2 u + cn^2 u = 1, \tag{14}$$

$$dn^2 u + \varkappa^2 sn^2 u = 1. \tag{15}$$

Dritter Abschnitt.

Theorie der Picard'schen Differentialgleichungen.

---

§ 29.[4])

Definition der im Folgenden zu behandelnden Differentialgleichungen. Existenzbeweis eines Fundamentalsystems von Integralen für den Fall eines regulären Punktes.

In dem dritten und letzten Abschnitt dieses Werkes beschäftigen wir uns mit Differentialgleichungen von der Form:

$$1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots p_n y,$$

wobei die sämmtlichen Coefficienten eindeutige Functionen von x und zwar gebrochene transcendente Functionen sein sollen. Um den elementaren Charakter unserer Betrachtungen zu wahren, sollen die einfachsten und wichtigsten Sätze über derartige Differentialgleichungen hier kurz entwickelt werden.

Diejenigen Punkte, an denen eine oder mehrere der Functionen p unendlich gross werden, nennen wir singuläre Punkte der Differentialgleichung, im Gegensatz hierzu nennen wir diejenigen Punkte, an denen die sämmtlichen Functionen $p_1, p_2, \ldots p_n$ sich regulär verhalten, reguläre Punkte derselben.

Es gilt dann der folgende Lehrsatz, der das Fundament der ganzen Theorie unserer Differentialgleichungen ist.

Lehrsatz: Ist x_0 ein regulärer Punkt der Differentialgleichung, so giebt es eine Potenzreihe, die nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreitet, welche der Differentialgleichung Genüge leistet und deren Convergenzbezirk mindestens bis zum nächsten singulären Punkt reicht. Die n ersten Coefficienten derselben sind willkürlich, die übrigen eindeutig bestimmt.

Den Beweis dieses fundamentalen Lehrsatzes geben wir in der folgenden Weise.

Im Punkte x_0 mögen die sämmtlichen Functionen $p_1, p_2, \ldots p_n$ sich regulär verhalten. Der nächste singuläre Punkt sei der Punkt x_1 und zwar möge seine Entfernung von x_0 gleich r_1 sein.

Die sämmtlichen Grössen p_s, die wir als Functionen von x durch $p_s(x)$ bezeichnen wollen, lassen sich dann nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickeln und zwar wird:

$$2)\quad p_s(x_0+h) = p_s(x_0) + h\left(\frac{dp_s(x)}{dx}\right)_{x_0} + \cdots \frac{h^m}{m!}\left(\frac{d^m p_s(x)}{dx^m}\right)_{x_0} + \cdots$$

Der Convergenzradius aller dieser Potenzreihen von h ist dann mindestens gleich r_1.

Es sei nun r irgend eine positive Grösse kleiner als r_1. Wir beschreiben um x_0 einen Kreis mit dem Radius r und lassen x alle Werthe auf demselben durchlaufen. Dann gehört zu den entsprechenden absoluten Beträgen von $p_s(x)$ eine obere Grenze, die wir durch M_s bezeichnen wollen. Gemäss des in § 3 des ersten Bandes abgeleiteten Satzes findet dann die Beziehung statt:

$$\left|\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m p_s(x)}{dx^m}\right)_{x_0}\right| \leq \frac{M_s}{r^m}.$$

Wir wollen nun eine Anzahl neuer Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ durch die Gleichungen definiren:

$$3)\qquad \varphi_1 = \frac{M_1}{1-\frac{x-x_0}{r}}, \ldots \quad \varphi_n = \frac{M_n}{1-\frac{x-x_0}{r}},$$

so ergeben sich durch Differentiation die Beziehungen:

$$4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_s}{dx} = \dfrac{1}{r}\dfrac{M_s}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r}\right)^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^m\varphi_s}{dx^m} = \dfrac{m!}{r^m}\dfrac{M_s}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{r}\right)^{m+1}}. \end{cases}$$

Daraus folgt für den Punkt $x = x_0$:

$$5)\qquad \begin{cases} \varphi_s(x_0) = M_s, \\ \left(\dfrac{d\varphi_s(x)}{dx}\right)_{x_0} = \dfrac{M_s}{r}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{d^m\varphi_s(x)}{dx^m}\right)_{x_0} = \dfrac{m!\,M_s}{r^m}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die obigen Ungleichungen ein, so nehmen dieselben die Form an:

$$\left|\left(\frac{d^m p_s(x)}{dx^m}\right)_{x_0}\right| < \left(\frac{d^m \varphi_s}{dx^m}\right)_{x_0}.$$

Hieraus folgt eine Reduction des Problems. Wir nehmen dazu die Differentialgleichung:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \varphi_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \frac{d^{n-2} x}{dx^{n-2}} + \cdots \varphi_n . u. \tag{6}$$

Könnten wir nun nachweisen, dass eine Potenzreihe von $x - x_0$ existirt, welche dieser Differentialgleichung Genüge leistet, so zwar, dass der Convergenzbezirk ein Kreis mit dem Radius r ist und die Grössen $u, \frac{du}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ beliebig gegebene positive Werthe annehmen, so wäre unser Lehrsatz bewiesen. Wir stellen dazu die folgenden Betrachtungen an.

Die sämmtlichen Ableitungen einer der ursprünglichen Differentialgleichung genügenden Function y lassen sich in die Form bringen:

$$\frac{d^r y}{dx^r} = \alpha_{r,\,n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \alpha_{r,\,n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots \alpha_{r,0}\, y,$$

wobei die Grössen α sich aus den Grössen p und deren Ableitungen durch die Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Nimmt man nunmehr die Differentialgleichung:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \varphi_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots \varphi_n . u,$$

so lassen sich die sämmtlichen Ableitungen einer derselben genügenden Function u in der ähnlichen Form:

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \beta_{r,\,n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \beta_{r,\,n-2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots \beta_{r,0} . u$$

darstellen. Die Grössen β werden aus den entsprechenden Grössen α abgeleitet, indem man an die Stelle einer jeden Function p und ihrer Ableitungen die entsprechende Function φ und ihre entsprechenden Ableitungen setzt.

Hieraus folgt:
$$\beta_{r,s} > |\alpha_{r,s}|$$
und damit ist die Richtigkeit der Behauptung nachgewiesen.

Wir können uns also auf die Discussion der Differentialgleichung beschränken:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \varphi_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \cdots \varphi_n u.$$

Wir setzen in ihr:

$$\frac{x - x_0}{r} = z,$$

so folgt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{r}\frac{du}{dz}, \dots \frac{d^n u}{dx^n} = \frac{1}{r^i}\frac{d^n u}{dx^n}$$

und es nimmt die transformirte Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Werthe von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ die Form an:

$$7) \qquad (1-z)\frac{d^n u}{dz^n} = M_1 . r \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + M_2 . r^2 \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \cdots M_n . r^n . u.$$

Es bleibt nachzuweisen, dass dieser Differentialgleichung eine Potenzreihe

$$u = a_0 + a_1 . z + a_2 . z^2 + \cdots$$

Genüge leistet, deren Convergenzbezirk ein Kreis mit dem Radius 1 ist, wobei die Grössen $a_0, a_1 \dots a_{n-1}$ beliebig vorgelegte positive Werthe annehmen. Den Beweis geben wir in der folgenden Weise. Jedenfalls müssen die Relationen bestehen:

$$\begin{cases} \quad (n+s)(n+s-1)\cdots(s+1)a_{n+s} \\ = (n+s-1)(n+s-2)\cdots(s+1)(s+M_1 r)a_{n+s-1} \\ + (n+s-2)\cdots(s+1)M_2 . r^2 . a_{n+s-2} + \cdots M_n . r^n . a_s. \end{cases}$$

Nimmt man daher die Grössen $a_0, a_1, \cdots a_{s-1}$, oder was dasselbe sagt, die Grössen:

$$\left(\frac{d^s u}{dz^s}\right)_0$$

positiv an, so sind alle Grössen a positiv und es kann ferner a_{n+s} in die Form gebracht werden:

$$a_{n+s} = \frac{s + M_1 r}{n+s} a_{n+s-1} + \psi,$$

wobei ψ eine positive Grösse bedeutet.

Man kann nun, ohne der Allgemeinheit der Untersuchungen Abbruch zu thun, annehmen, dass:

$$M_1 r > n$$

ist. In der That, ist dasselbe nicht der Fall, so bleiben alle nothwendigen Schlüsse erst recht gültig, wenn wir M_1 so gross wählen, dass dieser Ungleichung Genüge geleistet wird.

Unter solchen Umständen ist:

$$a_{n+s} > a_{n+s-1}$$

für jedes ganzzahlige s, sodass die Grössen a von a_n an mit ihrem Index wachsen, dass ferner die Ausdrücke:

$$\frac{a_s}{a_{s+r}}$$

für positive Werthe von r jedenfalls unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Aus den Relationen, die zwischen den Grössen a bestehen, folgt nun durch Division mit der Grösse:

$$(n+s)(n+s-1)\cdots(s+1)a_{n+s-1}$$

die Gleichung:

$$\frac{a_{n+s}}{a_{n+s-1}} = \frac{s_1 + M_1 \,.\, r}{n+s} + \frac{M_2 \,.\, r^2}{(n+s)(n+s-1)}\,\frac{a_{n+s-2}}{a_{n+s-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{M_n \,.\, r^n}{(n+s)\cdots(s+1)}\,\frac{a_s}{a_{n+s-1}}.$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{s=\infty} \frac{a_{n+s}}{a_{n+s-1}} = 1,$$

mithin ist:

$$\lim_{s=\infty} \frac{a_{n+s}}{a_{n+s-1}}\,\frac{z^{n+s}}{z^{n+s-1}} = z,$$

das heisst die Reihe:

$$u = \sum a_s z^s$$

ist convergent, so lange der absolute Betrag von z kleiner ist als 1. Damit ist der verlangte Beweis geliefert. Ein jedes Integral liefert nun eine analytische Function in dem Sinne, wie es in dem ersten Bande auseinandergesetzt worden ist. Wir wollen versuchen den Zusammenhang anzugeben, der zwischen denselben besteht. Bleiben wir bei dem Punkte x_0 stehen, so giebt es unendlich viele Potenzreihen von $x - x_0$, die der Differentialgleichung Genüge leisten, da die n ersten Coefficienten vollkommen willkürlich geblieben sind. Wir wollen n derselben herausgreifen:

$$y_1 = a_{01} + a_{11}(x-x_0) + \cdots a_{n-1,1}(x-x_0)^{n-1} + a_{n,1}(x-x_0)^n + \cdots$$

$$y_2 = a_{02} + a_{12}(x-x_0) + \cdots a_{n-1,2}(x-x_0)^{n-1} + a_{n,2}(x-x_0)^n + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = a_{2n} + a_{1n}(x-x_0) + \cdots a_{n-1,n}(x-x_0)^{n-1} + a_{n,n}(x-x_0)^n + \cdots$$

Die willkürlichen Coefficienten $a_{rs}(r \leqq n-1,\ s \leqq n)$ sollen hierbei so gewählt sein, dass ihre Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} & \cdots & a_{n-1,1} \\ a_{02} & a_{12} & \cdots & a_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{0n} & a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth annimmt.

Dann gilt der

Lehrsatz: Eine jede andere nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe, welche der vorgelegten Differentialgleichung Genüge leistet, lässt sich als eine lineare Function der soeben definirten n Reihen darstellen.

In der That, sei die Reihe:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

irgend eine andere Reihe, welche der Differentialgleichung Genüge leistet, dann wäre zu beweisen, dass n Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ derart bestimmt werden können, dass die identische Gleichung besteht:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots c_n y_n.$$

Dazu muss nachgewiesen werden, dass die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $x - x_0$ links und rechts einander gleich gemacht werden können und zwar können wir uns auf die Potenzen von der 0ten bis zur $n - 1^{\text{ten}}$ beschränken, da durch die Coefficienten derselben die Coefficienten der höheren eindeutig bestimmt sind.

Wir erhalten demgemäss die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_1 a_{01} + c_2 a_{02} + \cdots c_n a_{0n}, \\
a_1 &= c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \cdots c_n a_{1n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-1} &= c_1 a_{n-1,1} + \cdots \qquad c_n a_{n-1,n};
\end{aligned}$$

als hinreichende und nothwendige Bedingung für die Richtigkeit unserer Behauptung.

Diese Gleichungen stellen aber ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $c_1, c_2, \ldots c_n$ dar, welches immer auflösbar ist, da die Gleichungsdeterminante von Null verschieden ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun ein solches System von Integralen ein Fundamentalsystem nennen, die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Elemente desselben.

Aus dem letzten Satze folgt unmittelbar der weitere

Lehrsatz: Zwischen je $(n+1)$ Potenzreihen von $x - x_0$, die der vorgelegten Differentialgleichung Genüge leisten, findet eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten statt.

In der That, seien $y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(n)}$ $(n+1)$ solcher Reihen, so hat man die folgenden $(n+1)$ linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y &= c_1 \; y_1 + c_2 \; y_2 + \cdots c_n \; y_n, \\
y^{(1)} &= c^{(1)}{}_1 y_1 + c^{(1)}{}_2 y_2 + \cdots c^{(1)}{}_n y_n, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
y^{(n)} &= c^{(n)}{}_1 y_1 + \cdots \qquad c^{(n)}{}_n y_n,
\end{aligned}$$

in denen die Grössen c sämmtlich Constanten sind. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_n$, so erhält man als Eliminationsresultat eine lineare homogene Gleichung zwischen $y, y^{(1)}, \ldots y^{(n)}$ mit constanten Coefficienten.

Wir denken uns nun ein Fundamentalsystem für den Punkt x_0 festgelegt, $y_1, y_2, \ldots y_n$ und wollen die Functionen in der im ersten Bande näher angegebenen Weise bis zu irgend einem andern regulären Punkte x_1 fortsetzen. Wir behaupten, dass das Fundamentalsystem dann seinen Charakter nicht geändert hat, dass seine Determinante wiederum von Null verschieden ist.

In der That, es gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n y_1}{dx^n} &= p_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + \cdots p_n \cdot y_1, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^n y_n}{dx^n} &= p_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} + \cdots p_n \cdot y_n.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir daher die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} & \cdots & y_1 \\
\frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} & \cdots & y_2 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}} & \cdots & y_n
\end{vmatrix}$$

durch D, ferner die Determinante, bei welcher in der ersten Verticalreihe an Stelle des $n-1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten die entsprechenden n^{ten} gesetzt sind, durch D_1, so folgt:

$$D_1 = p_1 \,.\, D.$$

Andererseits ist aber D_1, wie sich unmittelbar ergiebt, der Differentialquotient von D nach x, sodass wir die bekannte Relation erhalten:

$$\frac{d \log D}{dx} = p_1,$$

oder also:

$$D = C \,.\, e^{\int p_1 dx}, \tag{8}$$

wo C eine Constante bedeutet, die durch die Werthe von $y_1, y_2, \ldots y_n$ und ihrer Ableitungen im Punkte $x = x_0$ bestimmt und demgemäss

von Null verschieden ist. Da $\int p_1 dx$ nur für einen singulären Punkt unendlich werden kann, so folgt, dass D an allen regulären Stellen von Null verschieden sein muss.

Hieraus folgt, dass wenn die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem bilden, sie auch dann ein solches ausmachen, wenn man jede derselben auf demselben Wege zum Punkte x_0 zurückführt.

Um weitere Eigenschaften der Fundamentalintegrale zu erhalten, beweisen wir den folgenden

Lehrsatz: Die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass zwischen n in der früheren Weise definirten Functionen von x: $y_1, y_2, \ldots y_n$ eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht:

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots c_n \cdot y_n = 0,$$

ist das Verschwinden der Determinante D.

Dass dieses Verschwinden von D eine nothwendige Bedingung ist, folgt unmittelbar, etwas schwieriger ist es zu zeigen, dass es auch die hinreichende ist.

Um dieses zu beweisen, nehmen wir zunächst an, dass die Unterdeterminante $n-1^{\text{ten}}$ Grades D', welche in der Entwickelung von D den Coefficienten von $y_n^{(n-1)}$ bildet, nicht identisch verschwindet. Löst man dann die $n-1$ homogenen linearen Gleichungen:

$$9)\quad \begin{cases} z_1 \cdot y_1 + z_2 \cdot y_2 + \cdots z_n \cdot y_n = 0, \\ z_1 \cdot y'_1 + z_2 \cdot y'_2 + \cdots z_n \cdot y'_n = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_1 \cdot y_1^{(n-2)} + \cdots \; z_n \cdot y_n^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

nach den Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_n$ auf, so erhält man für die Verhältnisse:

$$\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n}, \ldots \frac{z_{n-1}}{z_n}$$

völlig bestimmte endliche Ausdrücke. Diese müssen, da auch $D = 0$ ist, zu gleicher Zeit die Gleichung:

$$z_1 \cdot y_1^{(n-1)} + z_2 \cdot y_2^{(n-1)} + \cdots z_n \cdot y_n^{(n-1)} = 0$$

befriedigen. Unter solchen Umständen erhält man durch Differentiation aus dem obigen Gleichungssysteme das folgende:

$$10)\quad \begin{cases} z'_1 \cdot y_1 + z'_2 \cdot y_2 + \cdots z'_n \cdot y_n = 0, \\ z'_1 \cdot y'_1 + z'_2 \cdot y'_2 + \cdots z'_n \cdot y'_n = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z'_1 \cdot y_1^{(n-2)} + z'_2 \cdot y_2^{(n-2)} + \cdots z'_n \cdot y_n^{(n-2)} = 0, \end{cases}$$

in welchem z'_r die Ableitung von z_r bedeutet. Da aber durch die Gleichungen 9) die Verhältnisse:

$$\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n}, \dots \frac{z_{n-1}}{z_n}$$

vollständig bestimmt werden, so müssen sich aus dem mit 9) identischen Gleichungssystem 10) für die Verhältnisse:

$$\frac{z'_1}{z'_n}, \frac{z'_2}{z'_n}, \dots \frac{z'_{n-1}}{z'_n}$$

dieselben Werthe ergeben oder es muss für $r = 1, 2, \dots n-1$

$$\frac{z_r}{z_n} = \frac{z'_r}{z'_n},$$

das heisst:

11) $$\frac{z_r}{z_n} = \frac{c_r}{c_n}$$

sein, wenn $c_1, c_2, \dots c_n$ Constanten sind, von denen c_n willkürlich, aber von Null verschieden ist.

Aus der ersten Gleichung des Systems 9) folgt daher die Relation:

12) $$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots c_n \cdot y_n = 0.$$

Wenn $D' = 0$ ist, aber die Unterdeterminante $n - 2^{\text{ten}}$ Grades D'', welche in D' den Coefficienten von $y_{n-1}^{(n-2)}$ bildet, nicht identisch verschwindet, so ergiebt sich auf demselben Wege eine Relation von der Form:

13) $$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots c_{n-1} \cdot y_{n-1} = 0,$$

in welcher c_{n-1} von Null verschieden ist. Schliesst man so weiter, so folgt, dass aus der Annahme $D = 0$ stets eine Gleichung von der Form:

14) $$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots c_n \cdot y_n = 0$$

sich ergiebt, in welcher die Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$ nicht sämmtlich verschwinden.

Wir können nun die vorhin gegebene Definition eines Fundamentalsystems durch eine andere ersetzen und zwar geschieht das auf Grund des

Lehrsatzes: Ein System von Integralen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ bildet dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn eine Gleichung von der Form:

$$c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots c_n \eta_n = 0$$

für keine endlichen bestimmten Werthe der Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$ stattfinden kann oder was dasselbe sagt, wenn sie linear von einander unabhängig sind.

In der That, sei $y_1, y_2, \dots y_n$ irgend ein Fundamentalsystem in dem zuerst angegebenen Sinne. Es muss dann jedenfalls ein Gleichungssystem von der Form bestehen:

$$15)\qquad \begin{cases} \eta_1 = b_{11}\cdot y_1 + b_{12}\cdot y_2 + \cdots b_{1n}\cdot y_n, \\ \eta_2 = b_{21}\cdot y_1 + b_{22}\cdot y_2 + \cdots b_{2n}\cdot y_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_n = b_{n1}\cdot y_1 + b_{n2}\cdot y_2 + \cdots b_{nn}\cdot y_n, \end{cases}$$

wobei die Grössen b Constanten sind. Die Determinante derselben muss von Null verschieden sein, da sonst zwischen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ eine lineare homogene Relation bestehen müsste. Daher lassen sich $y_1, y_2, \ldots y_n$ und folglich alle Integrale der vorgelegten Differentialgleichung als lineare homogene Functionen der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ darstellen. Hieraus folgt, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}\eta_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\eta_1}{dx^{n-2}} & \cdots & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-1}\eta_n}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-2}\eta_n}{dx^{n-2}} & \cdots & \eta_n \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein muss und damit ist die Richtigkeit der Behauptung bewiesen.

Für die späteren Untersuchungen zeigen sich noch die folgenden Betrachtungen von Bedeutung.

Es sei die Differentialgleichung vorgelegt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots p_n \cdot y$$

und y_1 ein Integral derselben, welches nicht identisch verschwindet. Setzt man dann:

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

so genügt z einer linearen Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = q_1 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \cdots q_{n-1} z,$$

wobei die Grössen q sich in einfacher Weise aus den Grössen p, der Grösse y_1 und deren Differentialquotienten zusammensetzen lassen.

Es sei z_1 ein Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist:

$$y_2 = y_1 \int z_1\, dx$$

ein zweites Integral der ursprünglichen Differentialgleichung. Setzt man nun:

$$z = z_1 \int u\, dx,$$

so genügt u einer linearen Differentialgleichung $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} = r_1 \frac{d^{n-3} u}{dx^{n-3}} + \cdots r_{n-2} \cdot u.$$

Ist u_1 ein Integral dieser Differentialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist:

$$z_2 = z_1 \int u_1 \, dx$$

ein zweites Integral der Differentialgleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung und

$$y_3 = y_1 \int z_1 \, dx \int u_1 \, dx$$

ein drittes particuläres Integral der ursprünglichen Differentialgleichung.

Führt man so fort, so gelangt man schliesslich zu einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dw}{dx} = tw$$

und man erhält auf diesem Wege n Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung.

Es kann behauptet werden, dass die so erhaltenen Integrale ein Fundamentalsystem bilden. Bei dem Beweis nehmen wir, wie Fuchs es in der citirten Arbeit thut, der Einfachheit halber $n = 3$ an. Bildeten in diesem Falle die Grössen y_1, y_2, y_3 kein Fundamentalsystem, so hätte man eine Gleichung:

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_1 \int z_1 \, dx + c_3 \cdot y_1 \int z_1 \, dx \int u_1 \, dx = 0,$$

wobei c_1, c_2, c_3 Constanten sind, die nicht sämmtlich verschwinden. Da y_1 nicht identisch verschwindet, so darf man diese Gleichung durch y_1 dividiren. Differenzirt man alsdann, so erhält man:

$$c_2 \cdot z_1 + c_3 \cdot z_1 \int u_1 \, dx = 0.$$

Da z_1 nicht identisch verschwindet, so darf man wieder durch z_1 dividiren und man erhält durch Differentiation:

$$c_3 \cdot u_1 = 0.$$

Da nun u_1 nicht identisch verschwindet, so hätte man $c_3 = 0$. Es müsste alsdann:

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_1 \int z_1 \, dx = 0$$

sein. Hieraus würde auf ähnliche Weise folgen $c_2 \cdot z_1 = 0$ und daher $c_2 = 0$ und folglich auch $c_1 = 0$.

Es ergiebt sich also, dass die lineare Relation nicht bestehen kann, und dass daher die auf die angegebene Weise ermittelten Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

§ 30.

Betrachtung der singulären Punkte. Definition und Haupteigenschaften der Fundamentalgleichung.

Wir denken uns jetzt für den regulären Punkt x_0 ein Integral gebildet und wollen untersuchen, wie dasselbe sich ändert, wenn wir die Veränderliche x einen singulären Punkt umkreisen lassen.

Die Differentialgleichung schreiben wir wieder:

$$1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots p_n \cdot y,$$

wo über die Coefficienten die früher angegebenen Voraussetzungen gemacht werden.

Es sei dann für den Punkt x_0 u irgend ein Integral der Differentialgleichung, es mögen ferner $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem bilden, so können wir setzen:

$$2)\qquad u = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots x_n \cdot y_n,$$

wobei die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ Constanten sind. Nach einem Umlauf um einen singulären Punkt a mögen die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ übergehen in $S.y_1, S.y_2, \ldots S.y_n$, so bestehen nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen die Gleichungen:

$$3)\qquad \begin{cases} S.y_1 = \alpha_{11} \cdot y_1 + \alpha_{12} \cdot y_2 + \cdots \alpha_{1n} \cdot y_n, \\ S.y_2 = \alpha_{21} \cdot y_1 + \alpha_{22} \cdot y_2 + \cdots \alpha_{2n} \cdot y_n, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ S.y_n = \alpha_{n1} \cdot y_1 + \alpha_{n2} \cdot y_2 + \cdots \alpha_{nn} \cdot y_n, \end{cases}$$

wobei die Constanten α die Eigenschaft besitzen, dass ihre Determinante von Null verschieden ist. Nach einem Umlauf um den Punkt a geht alsdann u über in:

$$4)\qquad S.u = y_1 \sum \alpha_{s1}\, x_s + y_2 \sum \alpha_{s2}\, x_s + \cdots y_n \sum \alpha_{sn}\, x_s,$$

wobei die Summen sämmtlich nach s von 1 bis n zu nehmen sind.

Wir wollen versuchen die Grössen x so zu bestimmen, dass

$$S.u = \omega . u$$

wird, wo ω eine Constante bedeutet. Multiplicirt man zu dem Zwecke die Gleichung 2) mit ω und subtrahirt sie alsdann von Gleichung 4), so ergiebt der Umstand, dass zwischen $y_1, y_2, \ldots y_n$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet, zur Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots x_n$ das folgende System von Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} x_1(\alpha_{11} - \omega) + x_2 . \alpha_{21} + \cdots x_n . \alpha_{n1} = 0, \\ x_1 . \alpha_{12} + x_2(\alpha_{22} - \omega) + \cdots x_n . \alpha_{n2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 . \alpha_{1n} + x_2 . \alpha_{2n} + \cdots x_n(\alpha_{nn} - \omega) = 0. \end{cases}$$

Ist daher ω eine Wurzel der Gleichung:

$$6)\quad A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

so lassen sich die Grössen x so bestimmen, dass sie nicht alle verschwinden. Dabei folgt, dass die Wurzeln der Gleichung:

$$A = 0$$

sämmtlich von Null verschieden sein müssen, da das von ω unabhängige Glied vermöge unserer Annahmen von Null verschieden ist.

Es geht also bei dieser Wahl der Grössen x das Integral u über in $u\omega$. Setzen wir daher:

$$7)\quad \omega = e^{2\varrho\pi i}$$

und legen dem ϱ irgend einen der entsprechenden Werthe bei, so wird der Ausdruck:

$$u(x - a)^{-\varrho}$$

sich bei einer Umkreisung des Punktes a nicht ändern, vorausgesetzt natürlich, dass kein anderer singulärer Punkt hierbei umkreist wird.

Wir nennen die Gleichung 6) die zum singulären Punkte a gehörende Fundamentalgleichung.

Die wichtigste Eigenschaft dieser Gleichung ist durch den folgenden Lehrsatz ausgesprochen:

Lehrsatz: Die Coefficienten der nach Potenzen von ω entwickelten Fundamentalgleichung sind von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig.

In der That, denken wir uns dazu ein anderes Fundamentalsystem zu Grunde gelegt, $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ und bilden den Ausdruck:

$$u = x_1 . \eta_1 + \cdots x_n . \eta_n.$$

Das Fundamentalsystem der Grössen η hängt dann mit dem Fundamentalsystem der Grössen y durch die Gleichungen zusammen:

$$8)\quad \begin{cases} \eta_1 = k_{11} . y_1 + k_{12} . y_2 + \cdots k_{1n} . y_n, \\ \eta_2 = k_{21} . y_1 + k_{22} . y_2 + \cdots k_{2n} . y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n = k_{n1} . y_1 + k_{n2} . y_2 + \cdots k_{nn} . y_n. \end{cases}$$

Unter solchen Umständen können wir u in die Form bringen:

$$9)\quad \begin{cases} u = y_1(x_1 . k_{11} + x_2 . k_{21} + \cdots x_n . k_{n1}) + y_2(x_1 . k_{12} + x_2 . k_{22} + \cdots x_n . k_{n2}) + \cdots \\ \quad + y_n(x_1 . k_{1n} + x_2 . k_{2n} + \cdots x_n . k_{nn}). \end{cases}$$

Nun können wir genau so operiren wie vorhin. Wir erhalten dasselbe lineare Gleichungssystem wie vorhin, nur sind an Stelle der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Grössen getreten:

$$\begin{gathered} x_1 . k_{11} + x_2 . k_{21} + \cdots x_n . k_{n1}, \\ x_1 . k_{12} + x_2 . k_{22} + \cdots x_n . k_{n2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1 . k_{1n} + x_2 \; k_{2n} + \cdots x_n . k_{nn}. \end{gathered}$$

Die Form derselben ist aber für die Gleichungsdeterminante völlig gleichgültig. Sind die Unbekannten dieses Gleichungssystemes gefunden, so muss dann noch ein zweites Gleichungssystem aufgelöst werden, um die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmen. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wir nehmen jetzt an, dass die Fundamentalgleichung lauter von einander verschiedene Wurzeln habe. Dann gehören zu ihr n von einander verschiedene Integrale $u_1, u_2, \ldots u_n$. Für diese gilt der

Lehrsatz: Sind die Wurzeln der Fundamentalgleichung alle von einander verschieden, so bilden die dazu gehörenden Integrale $u_1, u_2, \ldots u_n$ ein Fundamentalsystem.

Der Beweis folgt in der folgenden Weise. Wäre die Annahme falsch, so müsste eine lineare Relation von der Form bestehen:

$$10)\qquad c_1 . u_1 + c_2 . u_2 + \cdots c_n . u_n = 0.$$

Durch Umkreisung des singulären Punktes werden sich dann Gleichungen von der Form ergeben müssen:

$$11)\quad c_1 . \omega^r{}_1 . u_1 + c_2 . \omega^r{}_2 . u_2 + \cdots c_n . \omega^r{}_n . u_n = 0, \quad r = 1, 2, \ldots n-1,$$

wenn wir unter $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Fundamentalgleichung verstehen. Diese Gleichungen können aber nicht zusammen bestehen, weil die Grössen ω alle von einander verschieden sind.

Fassen wir die Resultate zusammen, so gelangen wir zu dem folgenden

Lehrsatz: Sind die Wurzeln der Fundamentalgleichung alle von einander verschieden, so gehört zu dem entsprechenden singulären Punkte ein Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots u_n$, dessen sämmtliche Elemente mit Potenzen von $x - a$ multiplicirt, in der Umgebung von a eindeutig werden, sodass

$$u_1 = (x-a)^{\varrho_1}\varphi_1, \quad u_2 = (x-a)^{\varrho_2}\varphi_2, \ldots \quad u_n = (x-a)^{\varrho_n}\varphi_n$$

gesetzt werden kann, wo $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ bestimmte endliche Grössen sind, deren Differenzen weder Null noch ganze Zahlen sein können und wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen bedeuten.

Diese Functionen φ lassen sich dann nach dem Laurent'schen Satz nach steigenden und fallenden Potenzen von $(x-a)$ entwickeln.

Etwas mehr Schwierigkeiten bereitet der zweite Fall, in welchem einige Wurzeln einander gleich sind. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass zwei von ihnen denselben Werth besitzen und zwar ω_1 und ω_2. Um diesen Fall näher zu untersuchen, nehmen wir zunächst an, die beiden Wurzeln ω_1 und ω_2 wären von einander verschieden, so gehören dann zu ihnen zwei Integrale:

$$12) \qquad u_1 = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots x_n \cdot y_n$$

und

$$13) \qquad u_2 = z_1 \cdot y_1 + z_2 \cdot y_2 + \cdots z_n \cdot y_n,$$

wobei die Grössen x aus dem Gleichungssystem:

$$14) \qquad \sum a_{1r} \cdot x_1 + a_{2r} \cdot x_2 + \cdots (a_{rr} - \omega_1) x_r + \cdots a_{nr} \cdot x_n = 0,$$

die Grössen z aus dem Gleichungssystem:

$$15) \qquad \sum a_{1r} \cdot z_1 + a_{2r} \cdot z_2 + \cdots (a_{rr} - \omega_2) z_r + \cdots a_{nr} \cdot z_n = 0$$

bestimmt sind.

Aus dem ersten Gleichungssystem ergeben sich die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen von ω_1 und zwar können wir annehmen als ganze rationale Functionen vom Grade $n-1$. Wir wollen setzen:

$$16) \qquad x_1 = f_1(\omega_1), \quad x_2 = f_2(\omega_1), \ldots \quad x_n = f_n(\omega_1).$$

Analog wird dann:

$$17) \qquad z_1 = f_1(\omega_2), \quad z_2 = f_2(\omega_2), \ldots \quad z_n = f_n(\omega_2).$$

Wir setzen jetzt fest, dass die Beziehung besteht:

$$\omega_2 = \omega_1 + h,$$

so folgt:

$$18) \qquad z_r = x_r + h \frac{dx_r}{d\omega_1} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 x_r}{d\omega_1^2} + \cdots$$

Denken wir uns diese Ausdrücke in das lineare Gleichungssystem für die Grössen z eingesetzt, so können die linken Seiten der einzelnen Gleichungen nach Potenzen von h geordnet werden. Die von h unabhängigen Glieder verschwinden. Denken wir uns dann die rechten und linken Seiten der einzelnen Gleichungen durch h dividirt, so wird das von h unabhängige Glied links:

$$a_{1r} \frac{dx_1}{d\omega_1} + a_{2r} \frac{dx_2}{d\omega_1} + \cdots (a_{rr} - \omega_1) \frac{dx_r}{d\omega_1} + \cdots a_{nr} \frac{dx_n}{d\omega_1} - x_r.$$

Ist nun $\omega_2 = \omega_1$, so können wir $h = 0$ setzen und erhalten das Gleichungssystem:

$$19)\quad a_{1r}\frac{dx_1}{d\omega_1} + a_{2r}\frac{dx_2}{d\omega_1} + \cdots (a_{rr} - \omega_1)\frac{dx_r}{d\omega_1} + \cdots a_{nr}\frac{dx_n}{d\omega_1} - x_r = 0,$$

welches neben dem ursprünglichen besteht.

Setzen wir demnach:

$$20)\quad u_2 = y_1\frac{dx_1}{d\omega_1} + y_2\frac{dx_2}{d\omega_1} + \cdots y_n\frac{dx_n}{d\omega_1},$$

so wird u_2 jedenfalls ein Integral der Differentialgleichung sein, daneben aber die Eigenschaft besitzen, dass es bei einer Umkreisung des singulären Punktes a übergeht in:

$$\omega . u_2 + u_1.$$

Wir hätten hierbei, wie kaum hervorgehoben zu werden braucht, u_2 auch so wählen können, dass es bei der genannten Umkreisung übergehe in:

$$\omega . u_2 + \omega_{21} . u_1$$

wo ω_{21} eine Constante bedeutet.

Nehmen wir ferner an, dass im Uebrigen die Wurzeln ω alle von einander verschieden sind, so folgt analog, wie im einfachsten Falle, dass die Integrale $u_1, u_2, \ldots u_n$ ein Fundamentalsystem bilden. Der allgemeinste Fall ist analog zu untersuchen. Wir nehmen dazu an, es seien λ_1 Wurzeln der Fundamentalgleichung gleich ω_1, λ_2 Wurzeln gleich $\omega_2, \ldots \lambda_r$ Wurzeln gleich ω_r, wobei jetzt $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_r$ lauter von einander verschiedene Wurzeln bedeuten und

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_r = n$$

ist. Bezeichnen wir durch $S . u$ die Function, in die irgend eine Function u nach einem Umlaufe um den Punkt a übergeht, so gilt der folgende

Lehrsatz: Ist ω eine λfache Wurzel der Fundamentalgleichung, so gehört zu derselben eine Gruppe von Integralen $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ von der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} S . u_1 &= \omega . u_1, \\ S . u_2 &= \omega_{21} . u_1 + \omega . u_2, \\ S . u_3 &= \omega_{31} . u_1 + \omega_{32} . u_2 + \omega . u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S . u_\lambda &= \omega_{\lambda 1} . u_1 + \omega_{\lambda 2} . u_2 + \cdots \omega . u_\lambda, \end{aligned}$$

wobei die mit zwei Indices versehenen Grössen ω neben ω selbst Constanten sind. Die zu den verschiedenen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ gehörenden Gruppen von Integralen bilden zusammen ein Fundamentalsystem.

Hieraus folgt der weitere

Lehrsatz: Es sei a irgend ein singulärer Punkt und von den Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung seien λ_1 gleich ω_1, λ_2 gleich $\omega_2, \ldots \lambda_r$ gleich ω_r, wo ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_r$ von einander verschieden sind und

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_r = n,$$

so giebt es ein Fundamentalsystem, dessen Elemente in Gruppen vertheilt werden können, derart, dass zu jeder der verschiedenen Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ eine Gruppe von resp. je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ Integralen gehört. Es sei ω eine der Wurzeln und λ der Grad ihrer Vielfachheit, so hat die zu derselben gehörende Gruppe von λ Integralen $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ die Gestalt:

$$u_1 = (x-a)^\varrho \varphi_{11},$$
$$u_2 = (x-a)^\varrho \varphi_{21} + (x-a)^\varrho \varphi_{22} \log(x-a),$$
$$u_3 = (x-a)^\varrho \varphi_{31} + (x-a)^\varrho \varphi_{32} \log(x-a) + (x-a)^\varrho \varphi_{33} [\log(x-a)]^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_\lambda = (x-a)^\varrho \varphi_{\lambda 1} + (x-a)^\varrho \varphi_{\lambda 2} \log(x-a) + \cdots (x-a)^\varrho \varphi_{\lambda\lambda} [\log(x-a)]^{\lambda-1},$$

wo ϱ einen der unendlich vielen um ganze Zahlen von einander verschiedenen Werthe des Ausdrucks

$$\frac{1}{2\pi i} \log \omega$$

bedeutet und die Grössen φ in der Umgebung von a eindeutige Functionen von x sind, zwischen denen die Beziehung besteht, dass jede derselben eine lineare homogene Function der Grössen $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}, \ldots \varphi_{\lambda 1}$ mit constanten Coefficienten ist.

In der That, jedenfalls ist:

$$21) \qquad u_1 = (x-a)^\varrho \varphi_{11}, \quad \varrho = \frac{1}{2\pi i} \log \omega.$$

Ferner war:

$$S \,.\, u_2 = \omega_{21} \,.\, u_1 + \omega \,.\, u_2,$$

also folgt:

$$\frac{S\,.\,u_2}{S\,.\,u_1} = S \frac{u_2}{u_1} = \frac{\omega_{21}}{\omega} + \frac{u_2}{u_1}.$$

Hieraus folgt, dass bei einem Umlauf um den Punkt $x = a$ die Function $\frac{u_2}{u_1}$ in sich selbst vermehrt um eine Constante übergeht. Unter solchen Umständen ist:

$$\frac{u_2}{u_1} - \frac{\omega_{21}}{\omega} \frac{\log(x-a)}{2\pi i}$$

in der Umgebung von $x = a$ eine eindeutige Function, die wir durch $f(x)$ bezeichnen wollen. Mithin erhalten wir:

$$u_2 = u_1 f(x) + \frac{\omega_{21}}{\omega} \frac{u_1}{2\pi i} log(x - a),$$

oder indem wir für u_1 seinen Werth einsetzen:

$$u_2 = (x - a)^r \left(\varphi_{11} f(x) + \frac{\omega_{21}}{\omega} \frac{\varphi_{11}}{2\pi i} log(x - a)\right)$$

das heisst:

$$22) \qquad u_2 = (x - a)^r [\varphi_{21} + \varphi_{22} log(x - a)],$$

wobei φ_{22} sich von φ_{11} nur um eine Constante unterscheidet. Damit ist der Satz im einfachsten Falle bewiesen.

Wir wollen jetzt einen Schritt weitergehen. Es war:

$$S\left(\frac{u_3}{u_1}\right) = \frac{\omega_{31}}{\omega} + \frac{\omega_{32}}{\omega} \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1}.$$

Berücksichtigen wir den gefundenen Werth von $u_2 : u_1$, nämlich den Werth:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\omega_{21}}{\omega} \frac{log(x - a)}{2\pi i} + f(x),$$

so folgt:

$$S\left(\frac{u_3}{u_1}\right) = \frac{\omega_{31}}{\omega} + \frac{\omega_{21} \cdot \omega_{32}}{\omega^2 . 2\pi i} log(x - a) + \frac{\omega_{32}}{\omega} f(x) + \frac{u_3}{u_1}.$$

Bilden wir nun den Ausdruck:

$$\frac{u_3}{u_1} - c[log(x - a)]^2 - [c_1 f(x) + c_2] log(x - a),$$

so können wir die Constanten so bestimmen, dass dieser Ausdruck bei einer Umkreisung des Punktes $x = a$ sich nicht ändert. In der That, er geht über in:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega} + \frac{\omega_{21}\,\omega_{32}}{\omega^2 . 2\pi i} log(x - a) + \frac{\omega_{32}}{\omega} f(x) + \frac{u_3}{u_1} - c[log(x - a)]^2 + 4c\pi^2$$
$$- 4c\pi i\, log(x - a) - [c_1 f(x) + c_2] log(x - a) - 2\pi i [c_1 f(x) + c_2].$$

Die Richtigkeit der Behauptung wäre nachgewiesen, wenn gezeigt werden könnte, dass die Gleichungen bestehen können:

$$\frac{\omega_{21}\,\omega_{32}}{\omega^2 . 2\pi i} - 4c\pi i = 0,$$

$$\frac{\omega_{31}}{\omega} - 2c_1 \pi i = 0,$$

$$4c^2\pi^2 + \frac{\omega_{31}}{\omega} - 2c_2 \pi i = 0.$$

Diese Gleichungen können aber thatsächlich bestehen, sodass der vorhin definirte Ausdruck in der That bei einer Umkreisung des Punktes $x = a$ sich nicht ändert.

Wir bezeichnen ihn durch $f_1(x)$, so folgt:

$$u_3 = u_1 f_1(x) + u_1 [c_1 f(x) + c_2] log(x-a) + u_1 c [log(x-a)]^2,$$

oder also:

23) $$u_3 = (x-a)^\varrho [\varphi_{31} + \varphi_{32} log(x-a) + \varphi_{33} [log(x-a)]^2],$$

wobei φ_{32} und φ_{33} sich linear durch φ_{11} und φ_{21} ausdrücken lassen. Damit ist auch in diesem Falle die Richtigkeit der Behauptung nachgewiesen und genau so können wir weitergehen und erhalten den vorhin aufgestellten Lehrsatz von Fuchs.

§ 31.

Aufstellung von nothwendigen Bedingungen dafür, dass die sämmtlichen Integrale sich in der Nähe eines singulären Punktes $x=a$, mit einer Potenz von $(x-a)$ multiplicirt, durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $(x-a)$ darstellen lassen.

Wir denken uns wiederum eine lineare homogene Differentialgleichung vorgelegt, die wir in einer gegen die frühere etwas modificirten Weise schreiben wollen:

1) $$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots p_n y = 0.$$

Die Grössen p sollen wiederum im allgemeinsten Falle gebrochene transcendente Functionen sein. Unter a verstehen wir wie vorhin einen singulären Punkt der Differentialgleichung und fragen nach den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die sämmtlichen Integrale sich in die Form bringen lassen:

$$y = \sum g_\nu (x-a)^{\nu+\varrho},$$

wobei ν die Werthe von 0 bis ∞ durchläuft, ϱ irgend einen Werth besitzt und die Constante g_0 von Null verschieden angenommen werden soll.

Bilden wir dazu die Ausdrücke:

$$(x-a)p_1, \quad (x-a)^2 p_2, \ldots (x-a)^n p_n$$

und nehmen an, dass mindestens einer derselben keinen endlichen Werth für $x=a$ besitzen soll.

Wenn mehrere diese Eigenschaft besitzen, so wollen wir annehmen, dass die Glieder von der Ordnungszahl $m_1, m_2, \ldots$ unendlich gross von der Ordnungszahl μ seien, wobei μ die höchste vorkommende Zahl bedeutet.

Nehmen wir nun an, dass die Differentialgleichung ein Integral von der soeben angegebenen Form besitze, dann erhält man durch Coefficientenvergleichung die Gleichung:

$$\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+m_1+1)q_{m_1}+\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+m_2+1)q_{m_2}+\cdots=0,$$

wobei q_{m_1}, q_{m_2} etc. die Grenzen der Grössen:

$$(x-a)^{m_1+\mu}p_{m_1},\quad (x-a)^{m_2+\mu}p_{m_2},\ldots$$

für $x=a$ bedeuten. Dieser Gleichung muss der Exponent ϱ Genüge leisten. Dieselbe ist von einem Grade, der kleiner ist als der Grad der Differentialgleichung. Unter solchen Umständen können nicht sämmtliche Integrale die verlangte Form besitzen und wir finden den

Lehrsatz: Als nothwendige Bedingungen dafür, dass alle Integrale unserer Differentialgleichung um den singulären Punkt $x=a$ herum sich in der Form darstellen lassen:

$$y=\sum g_\nu (x-a)^{\nu+\varrho}$$

erhalten wir die Darstellungen:

$$(x-a)\,p_1=b_{01}+b_{11}(x-a)+b_{21}(x-a)^2+\cdots,$$
$$(x-a)^2p_2=b_{02}+b_{12}(x-a)+b_{22}(x-a)^2+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x-a)^n p_n=b_{0n}+b_{1n}(x-a)+b_{2n}(x-a)^2+\cdots$$

Wir gehen nun einen Schritt weiter und nehmen an, dass die soeben angegebenen Bedingungen erfüllt seien.

Ferner wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass der zu betrachtende singuläre Punkt $x=0$ sei und die Differentialgleichung in der Form schreiben:

2) $$x^n.y^{(n)}+x^{n-1}.p_1.y^{n-1}+x^{n-2}.p_2.y^{(n-2)}+\cdots p_n=0,$$

wobei jetzt die Functionen p sich im Nullpunkte regulär verhalten. Die linke Seite der Differentialgleichung bezeichnen wir kurz durch $P(y)$. Wir setzen nun in die Differentialgleichung für y eine Reihe von der Form:

3), $$g(x,\varrho)=\sum g_\nu.x^{\varrho+\nu}.$$

Man übersieht leicht, dass:

$$P\left(\sum g_\nu x^{\varrho+\nu}\right)=\sum g_\nu.P(x^{\varrho+\nu})$$

ist. Nun ist aber:

$$P(x^\varrho)=x^\varrho.f(x,\varrho),$$

wenn $f(x,\varrho)$ gesetzt wird gleich:

$$\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+1)+\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+2)p_1(x)+\cdots p_n(x).$$

Folglich ist:

4) $$P[g(x,\varrho)]=\sum g_\nu.f(x,\varrho+\nu)\,x^{\varrho+\nu}.$$

Da sich $p_1(x), p_2(x),\ldots p_n(x)$ in convergente nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen entwickeln lassen, so convergirt auch die Reihe:

$$f(x, \varrho) = \sum f_\nu(\varrho) x^\nu,$$

deren Coefficienten ganze Functionen höchstens n^{ten} Grades von ϱ sind. Daher nimmt die linke Seite der Differentialgleichung, wenn für y die Function $g(x, \varrho)$ eingesetzt wird, die Gestalt an:

$$5) \quad \sum [g_\nu . f(\varrho+\nu) + g_{\nu-1} . f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots g_1 . f_{\nu-1}(\varrho+1) + g . f_\nu(\varrho)] x^{\varrho+\nu}.$$

Soll also die Reihe 3) die Differentialgleichung befriedigen, so müssen ihre Coefficienten durch die Recursionsformeln:

$$6) \begin{cases} g \,. f(\varrho) = 0, \\ g_1 . f(\varrho+1) + g . f_1(\varrho) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ g_\nu . f(\varrho+\nu) + g_{\nu-1} . f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots g_1 . f_{\nu-1}(\varrho+1) + g . f_\nu(\varrho) = 0 \end{cases}$$

bestimmt werden. Nehmen wir daher g von Null verschieden an, so müssen die Exponenten ϱ der Gleichung n^{ten} Grades Genüge leisten:

$$7) \qquad f(\varrho) = 0,$$

die wir auch schreiben können:

$$8) \quad \begin{cases} \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+1) + \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+2) p_1(0) + \cdots \\ \qquad + p_n(0) = 0. \end{cases}$$

Sollen daher alle Integrale sich in die angegebene Form bringen lassen, so müssen sämmtliche Wurzeln der Gleichung:

$$f(\varrho) = 0$$

von einander verschieden sein. Unter solchen Umständen finden wir den

Lehrsatz: Als weitere nothwendige Bedingung dafür, dass die Integrale um den singulären Punkt $x = 0$ herum sich in der Form darstellen lassen:

$$y = \sum g_\nu x^{\nu+\varrho},$$

ergiebt sich die Bedingung, dass die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung:

$$f(\varrho) = 0$$

von einander verschieden sind.

§ 32.

Die determinirende Gleichung. Haupteigenschaften derselben.

Wir sind im vorigen Paragraphen zu der überaus wichtigen Gleichung gekommen:

$$1) \quad \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+1) + \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+2) p_1(0) + \cdots + p_n(0) = 0.$$

Dieselbe wird die zu dem betreffenden singulären Punkte — im speciellen Falle der Nullpunkt — gehörende determinirende oder auch determinirende Fundamentalgleichung genannt. Ehe wir in unserer Betrachtung weitergehen, mögen einige der wichtigsten Eigenschaften derselben aufgestellt werden.

I. Wenn die Grösse p_n gleich Null ist, so ist die determinirende Gleichung durch ϱ theilbar. Führt man diese Operation aus und ersetzt sodann ϱ durch $\varrho + 1$, so erhält man die determinirende Gleichung, welche zu der Gleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung gehört, die aus der ursprünglichen entsteht, wenn an Stelle von $\frac{dy}{dx}$ gesetzt wird y.

II. Führt man in die ursprüngliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung an Stelle von y eine neue abhängige Veränderliche u ein, die mit ihr durch die Gleichung verbunden ist:

$$y = u \,.\, \varphi(x) \tag{2}$$

und es lässt sich $\varphi(x)$ um den Punkt $x = 0$ herum in eine Potenzreihe entwickeln, deren constantes Glied von Null verschieden ist, so ist die determinirende Gleichung der Differentialgleichung mit der abhängigen u identisch mit der determinirenden Gleichung der ursprünglichen Differentialgleichung.

In der That, bei dieser Substitution geht über:

$$\frac{p_1}{x} \text{ in } \frac{\varphi(x) p_1 + x \,.\, n \varphi'(x)}{x},$$

$$\frac{p_2}{x^2} \text{ in } \frac{\varphi(x) p_2 + x(n-1)_1 \varphi'(x) p_1 + x^2 n_2 \varphi''(x)}{x^2}$$

. . . .

Setzt man diese Ausdrücke in die determinirende Gleichung ein, nachdem noch in den Zählern $x = 0$ gesetzt wird, so ergiebt sich in der That die ursprüngliche determinirende Gleichung.

III. gilt der

Lehrsatz: Setzt man:

$$y = x^{\varrho_1} \,.\, u, \tag{3}$$

dann werden die Wurzeln der determinirenden Gleichung der Differentialgleichung mit der abhängigen Veränderlichen u resp. gleich $\varrho - \varrho_1$, wo an Stelle von ϱ der Reihe nach die Wurzeln der ursprünglichen determinirenden Gleichung zu nehmen sind.

In der That, bei dieser Substitution geht unsere Differentialgleichung über in:

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{q_1}{x}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dots \frac{q_n}{x^n}u = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$q_s = \frac{n\,.\,\overline{n-1}\dots\overline{n-s+1}}{1\,.\,2\dots s}\varrho_1\,.\,\overline{\varrho_1-1}\dots\overline{\varrho_1-s+1}$$

$$+\frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}\dots\overline{n-s+1}}{1\,.\,2\dots\overline{s-1}}\varrho_1\,.\,\overline{\varrho_1-1}\dots\overline{\varrho_1-s+2}\,.\,p_1$$

$$+\frac{\overline{n-2}\,.\,\overline{n-3}\dots\overline{n-s+1}}{1\,.\,2\dots\overline{s-2}}\varrho_1\,.\,\overline{\varrho_1-1}\dots\overline{\varrho_1-s+3}\,.\,p_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\overline{n-s+1}\,.\,\varrho_1 p_{s-1}+p_s.$$

Wir wollen nun die determinirende Gleichung der ursprünglichen Differentialgleichung bezeichnen durch

$$f(\varrho) = 0$$

und versuchen die Gleichung zu bilden:

$$f(\varrho+\varrho_1) = 0.$$

Wir greifen dazu das allgemeine Glied der ursprünglichen determinirenden Gleichung heraus. Dasselbe lautet:

$$(n-s)!\ \varrho_{n-s}\,.\,p_s.$$

Nun ist allgemein:

$$p!\,(u+v)_p = \sum_{x=0}^{x=p} p_x\,.\,u_{p-x}\,.\,v_x\,.\,x!\ \overline{p-x}!$$

In Folge dessen wird:

$$\begin{cases} (n-s)!\ (\varrho+\varrho_1)_{n-s}p_s = \sum P\,.\,P'. \\ P = \dfrac{\overline{n-s}\,.\,\overline{n-s+1}\dots\overline{n-s-x+1}}{x!} \\ P' = \varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+s+x+1)\ \varrho_1(\varrho_1-1)\dots(\varrho_1-x+1). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir diese Gleichung und vereinigen in der Gleichung:

$$f(\varrho+\varrho_1) = 0$$

alle Glieder, bei welchen:

$$s + x = \sigma$$

ist, so wird ihre Summe:

$$\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+\sigma+1)q_\sigma,$$

wobei wir $q_0 = 1$ zu setzen haben. Mithin nimmt die Gleichung:

$$f(\varrho+\varrho_1) = 0$$

in der That die Form an:

$$4)\qquad \sum \varrho\,.\,\overline{\varrho-1}\dots(\varrho-n+\sigma+1)q_\sigma = 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 33.

Form der Integrale, wenn die im § 31 entwickelten Bedingungen erfüllt sind.

Wir nehmen nun an, es seien die im § 31 entwickelten Bedingungen erfüllt und fragen, welches dann die Form der Integrale ist. Die Betrachtung soll im Anschluss an eine Arbeit von Frobenius im 76. Bande des Crelle'schen Journals geführt werden, nur in einigen Punkten entfernt sie sich von derselben.

Wir wollen nun zwei Fälle unterscheiden. Erstens kann der Fall eintreten, dass je zwei Wurzeln der determinirenden Gleichung sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden und zweitens dasselbe ist der Fall.

Im ersten Falle kann gezeigt werden, dass die nothwendigen Bedingungen zu gleicher Zeit die hinreichenden sind.

In der That, verstehen wir unter ϱ eine Wurzel der determinirenden Gleichung, so folgt:

$$1)\qquad g_\nu = \frac{g \, . \, h_\nu(\varrho)}{f(\varrho+1)f(\varrho+2)\dots f(\varrho+\nu)},$$

wobei $h_\nu(\varrho)$ eine ganze Function von ϱ bedeutet, für welche sich durch Auflösung des in § 32 aufgestellten linearen Gleichungssystemes der Werth ergiebt:

$$2)\quad (-1)^\nu h_\nu(\varrho) = \begin{vmatrix} f_1(\varrho+\nu-1) & f_2(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-1}(\varrho+1) & f_\nu(\varrho) \\ f(\varrho+\nu-1) & f_1(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-2}(\varrho+1) & f_{\nu-1}(\varrho) \\ 0 & f(\varrho+\nu-2) & \dots & f_{\nu-3}(\varrho+1) & f_{\nu-2}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & f(\varrho+1) & f_1(\varrho) \end{vmatrix}$$

Um nun die Convergenz der vorgelegten unendlichen Reihe, welche der Differentialgleichung genügen soll, zu beweisen, verfahren wir folgendermassen. Aus den Recursionsformeln ergiebt sich:

$$3)\quad g_{\nu+1} = -\frac{1}{f(\varrho+\nu+1)}[g_\nu . f_1(\varrho+\nu) + g_{\nu-1} . f_2(\varrho+\nu-1) + \cdots g . f_{\nu+1}(\varrho)].$$

Bezeichnet man die absoluten Beträge der Functionen f_ν und g_ν mit F_ν und G_ν oder auch durch $F_\nu(\varrho)$ und $G_\nu(\varrho)$ etc., so folgt aus unserer Gleichung:

$$G_{\nu+1} \leqq \frac{1}{F(\varrho+\nu+\ )}[G_\nu . F_1(\varrho+\nu) + G_{\nu-1} . F_2(\varrho+\nu-1) + \cdots G . F_{\nu+1}(\varrho)].$$

Sei nun R der Radius eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, der beliebig wenig kleiner ist als der, innerhalb dessen die Functionen $p_1(x), p_2(x), \dots p_n(x)$ sämmtlich convergiren, dann sind die Reihen:

4) $$f(x,\varrho) = \sum f_\nu(\varrho)\, x^\nu$$

und:

5) $$f'(x,\varrho) = \sum (\nu+1) f_{\nu+1}(\varrho)\, x^\nu$$

ebenfalls für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach nicht grösser als R sind, convergent.

Wenn daher $M(\varrho)$ der grösste Werth ist, den der absolute Betrag von $f'(x,\varrho)$ auf der Peripherie des mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises annimmt, so ist:

$$F_{\nu+1}(\varrho) < \frac{1}{\nu+1} M(\varrho) R^{-\nu} < M(\varrho) R^{-\nu},$$

sodass wir erhalten:

$$G_{\nu+1} < \frac{1}{F(\varrho+\nu+1)} N$$

$$N = G_\nu . M(\varrho+\nu) + G_{\nu-1} . M(\varrho+\nu-1) R^{-1} + \cdots G . M(\varrho) R^{-\nu}.$$

Bezeichnet man die rechte Seite dieser Ungleichheit mit $a_{\nu+1}$, so ist:

$$a_{\nu+1} = \frac{G_\nu . M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} + \frac{a_\nu . F(\varrho+\nu)}{R . F(\varrho+\nu+1)},$$

oder da $G_\nu < a_\nu$ ist:

$$a_{\nu+1} < a_\nu \left(\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} + \frac{1}{R} \frac{F(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} \right).$$

Werden also die Grössen b_ν vermittelst der Recursionsformel:

$$b_{\nu+1} = b_\nu \left(\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} + \frac{1}{R} \frac{F(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} \right)$$

berechnet, so ist bei passender Verfügung über b_1:

$$G_\nu < a_\nu < b_\nu.$$

Da aber $f(\varrho)$ ein ganze Function n^{ten} Grades von ϱ ist, so nähert sich bei wachsendem ν der Quotient:

$$\frac{f(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu+1)}$$

und folglich auch sein absoluter Betrag:

$$\frac{F(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}$$

der Grenze 1. Ferner kann nachgewiesen werden, dass der Quotient:

$$\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)}$$

mit wachsendem ν sich der Grenze Null nähert.

In der That, bezeichnen wir den absoluten Betrag von ϱ mit σ und die Maxima der absoluten Beträge der Functionen $p'_1(x)$, $..p'_n(x)$

für die Werthe von x auf dem mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise mit $M_1, M_2, \ldots M_n$, setzen ferner:

6) $\psi(\sigma) = \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n-2)M_1 + \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n-3)M_2 + \cdots M_n$,

so ist:

$$M(\varrho) < \psi(\sigma)$$

und zwar können wir hierbei ϱ als unbeschränkt veränderliche Grösse auffassen.

Ferner ist:

$$f(\varrho) = \varrho^n + [f(\varrho) - \varrho^n]$$

und da der absolute Betrag einer Summe nicht kleiner als die Differenz der absoluten Beträge der Summanden ist, so folgt:

$$F(\varrho) \geqq \sigma^n - f(\varrho) - \varrho^n .$$

Nun ist aber:

$$f(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+1) + p_1(0)\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+2) + \cdots p_n(0).$$

Werden also die absoluten Beträge von $p_1(0), p_2(0), \ldots p_n(0)$ mit $P_1, P_2, \ldots P_n$ bezeichnet und wird:

7) $\varphi(\sigma) = \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n-1) + P_1.\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n-2) + \cdots + P_n - \sigma^n$

gesetzt, so ist:

$$|f(\varrho) - \varrho^n| < \varphi(\sigma)$$

und daher:

$$F(\varrho) > \sigma^n - \varphi(\sigma),$$

wenn nur σ gross genug gewählt wird, damit die rechte Seite dieser Ungleichung positiv ist. Das ist aber stets zu erreichen, da $\varphi(\sigma)$ nur vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade ist.

Aus den entwickelten Ungleichungen folgt:

$$\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} < \frac{\psi(\varrho+\nu)}{|\varrho+\nu+1|^n - \varphi(\varrho+\nu+1)}.$$

Nun ist aber:

$$|\varrho+\nu| < \nu+\sigma \quad \text{und} \quad |\varrho+\nu+1| > \nu-\sigma$$

und da die positiven Functionen $\psi(\sigma)$ und $\sigma^n - \varphi(\sigma)$ von einer gewissen Grenze an beständig mit dem Argumente wachsen, so ist für hinreichend grosse Werthe von ν:

$$\frac{M(\varrho+\nu)}{F(\varrho+\nu+1)} < \frac{\psi(\nu+\sigma)}{(\nu-\sigma)^n - \varphi(\nu-\sigma)}.$$

Der letztere Ausdruck nähert sich, da der Zähler eine ganze Function niedrigeren Grades von ν ist als der Nenner bei wachsendem ν der Grenze 0. Damit ist der verlangte Beweis geliefert.

Unter solchen Umständen ist:

$$\lim \frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} = \frac{1}{R}$$

und mithin convergirt die Reihe $\sum b_\nu . x^\nu$ und folglich auch:

$$g(x, \varrho) = \sum g_\nu(\varrho)\, x^{\varrho+\nu}$$

innerhalb des mit dem Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreises.

Auf diesem Wege erhalten wir zu jeder Wurzel der determinirenden Gleichung ein Integral:

$$y = \sum g_\nu . x^{\varrho+\nu}.$$

Dass diese Integrale, wenn wir an Stelle von ϱ die n von einander verschiedenen Wurzeln der determinirenden Gleichung setzen, alle von einander linear unabhängig sind, braucht nicht näher aus einander gesetzt zu werden.

Unter solchen Umständen finden wir den

Lehrsatz: Lässt eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung sich in die Form bringen:

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{x} y^{(n-1)} + \dots \frac{p_n(x)}{x^n} y = 0,$$

wobei die Functionen $p_1(x), \dots p_n(x)$ sich im Punkte $x = 0$ regulär verhalten, und sind die Wurzeln der determinirenden Gleichung, die Grössen $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_n$, alle von einander verschieden und unterscheiden sich von einander nicht um ganze Zahlen, so hat die Differentialgleichung n von einander unabhängige Integrale von der Form:

$$y = \sum g_\nu . x^{\nu+\varrho},$$

wo an Stelle von ϱ der Reihe nach zu setzen ist $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$.

Wir nehmen nun an, dass die Wurzeln der determinirenden Gleichung zwar alle von einander verschieden sind, aber theilweise sich von einander um ganze Zahlen unterscheiden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hierbei auf den Fall, dass alle Wurzeln sich von einander nur um ganze Zahlen unterscheiden, indem wir bemerken, dass der allgemeine Fall ganz analog zu behandeln ist.

Wir können dann die Wurzeln in der Reihenfolge schreiben:

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n,$$

so zwar, dass die Differenz $\varrho_j - \varrho_i$ kleiner ist als Null, wenn j grösser ist als i. Bei dieser Annahme sind die Differenzen $\varrho_1 - \varrho_i$ für $i = 2, 3, \dots n$ sämmtlich positive ganze Zahlen.

Dann giebt es, wenn wir die soeben angestellten Betrachtungen einfach wiederholen, jedenfalls ein Integral von der Form:

$$y = x^{\varrho_1} . \varphi_{11}(x), \tag{8}$$

wobei $\varphi_{11}(x)$ nach ganzen Potenzen von x fortschreitet und für $x = 0$ von Null verschieden ist. Wir setzen dann:

9) $$y = y_1 \int z\,dx,$$

so erhalten wir für z eine Differentialgleichung $n - 1^{ter}$ Ordnung, deren determinirende Gleichung, wie aus den Sätzen des vorigen Paragraphen folgt, die Wurzeln besitzt:

$$\varrho_2 - \varrho_1 - 1, \quad \varrho_3 - \varrho_1 - 1, \ldots \quad \varrho_n - \varrho_1 - 1.$$

Da die Coefficienten dieser Differentialgleichung dieselben Eigenschaften besitzen wie die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung, so folgt die Existenz eines Integrals von der Form:

10) $$z = x^{\varrho_2 - \varrho_1 - 1} . \psi(x),$$

wobei $\psi(x)$ sich nach ganzen Potenzen von x entwickeln lässt und $\psi(0)$ von Null verschieden ist.

Unter solchen Umständen erhalten wir für die ursprüngliche Differentialgleichung ein Integral von der Form:

11) $$y_2 = x^{\varrho_2}[\varphi_{21}(x) + \varphi_{22}(x) \log x],$$

wobei $\varphi_{21}(x)$ und $\varphi_{22}(x)$ sich nach ganzen Potenzen von x entwickeln lassen, im Punkte $x = 0$ nicht beide verschwinden und $x^{\varrho_2} . \varphi_{22}(x)$ von einem constanten Factor abgesehen, gleich y_1 ist.

So können wir weiter schliessen und erhalten den fundamentalen

Lehrsatz: Lässt eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung sich in die Form bringen:

$$y^{(n)} + \frac{p_1(x)}{x} y^{(n-1)} + \ldots \frac{p_n(x)}{x^n} y = 0,$$

wobei die Functionen $p_1(x), p_2(x), \ldots p_n(x)$ sich im Punkte $x = 0$ regulär verhalten und sind die Wurzeln der determinirenden Gleichung, die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ alle von einander verschieden, unterscheiden sich aber von einander nur um ganze Zahlen, so haben n Integrale die Form:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^{\varrho_1} \varphi_{11}, \\
y_2 &= x^{\varrho_2}[\varphi_{21} + \varphi_{22} . \log x], \\
y_3 &= x^{\varrho_3}[\varphi_{31} + \varphi_{32} . \log x + \varphi_{33} (\log x)^2], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= x^{\varrho_n}[\varphi_{n1} + \varphi_{n2} . \log x + \cdots \varphi_{nn} (\log x)^{n-1}].
\end{aligned}$$

Hierbei sind die Grössen ϱ in der vorhin angegebenen Weise geordnet, die Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ lassen sich nach ganzen Potenzen von x entwickeln, so zwar, dass nicht alle Grössen $\varphi_{\alpha 1}, \varphi_{\alpha 2}, \ldots \varphi_{\alpha\alpha}$ im Punkte $x = 0$ verschwinden, und endlich lassen sich die Ausdrücke:

$$x^{\varrho_\alpha} \,.\, \varphi_{\alpha\beta}$$

linear durch die Ausdrücke:

$$x^{\varrho_1} . \varphi_{11}, \; x^{\varrho_2} . \varphi_{21}, \ldots x^{\varrho_n} \varphi_{n1}$$

ausdrücken.

Dass diese Integrale linear von einander unabhängig sind, braucht nicht besonders bewiesen zu werden.

Im Anschluss an den soeben entwickelten Lehrsatz geben wir die folgende Definition.

Lässt ein Integral y_α unserer Differentialgleichung sich in die Form bringen:

$$y_\alpha = x^{\varrho_\alpha}[\varphi_{\alpha 1} + \varphi_{\alpha 2} \log x + \cdots \varphi_{\alpha\alpha}(\log x)^{\alpha - 1}],$$

wobei die Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ die vorhin angegebenen Eigenschaften besitzen, so wollen wir sagen, dasselbe gehöre zum Exponenten ϱ_α.

Wir wollen in Bezug hierauf den folgenden Lehrsatz entwickeln.

Gehört eine Function F zu einem Exponenten ϱ, so ist $\frac{dF}{dx}$ eine Function derselben Art, welche zum Exponenten $\varrho - 1$ gehört. Eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn $\varrho = 0$ ist und F im Punkte $x = 0$ endlich und von Null verschieden ist.

In der That nach Annahme hat F die Form:

$$F = x^\varrho[\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \cdots \varphi_p (\log x)^p + \cdots \varphi_m (\log x)^m],$$

wobei die Functionen φ sich nach ganzen Potenzen von x entwickeln lassen, die überdies positiv sind, und nicht alle im Punkte $x = 0$ der Null gleich werden.

Hieraus folgt:

$$\frac{dF}{dx} = \cdots x^{\varrho - 1}[\varrho \,.\, \varphi_p + (p+1)\varphi_{p+1} + x \,.\, \varphi'_p](\log x)^p + \cdots$$
$$+ x^{\varrho - 1}(\varrho \,.\, p_n + x \,.\, \varphi'_n)(\log x)^n,$$

wenn unter φ'_p etc. die Differentialquotienten von φ_p etc. verstanden werden. Wenn nun in diesem Ausdruck, nachdem wir $x^{\varrho - 1}$ als gemeinsamen Factor abgesondert haben, die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\log x$ im Punkte $x = 0$ sämmtlich gleich Null wären, so müssten für diesen Werth die Gleichungen bestehen:

$$\varrho \cdot \varphi_p + (p+1)\varphi_{p+1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varrho \cdot \varphi_n = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ sämmtlich im Punkte $x = 0$ der Null gleich sein müssten, was gegen die Annahme

ist. In einem Falle werden die Schlüsse unstreng, wenn nämlich $\varrho = 0$ ist. Wenn dann

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_n = 0$$

ist, wenn ferner F sich für $x = 0$ auf einen endlichen von Null verschiedenen Werth reducirt, so wird $\frac{dF}{dx}$ zum Exponenten Null oder zu einer positiven ganzen Zahl gehören.

Wir haben bei den bisherigen Untersuchungen zwei Arten von Gleichungen definirt, welche für einen singulären Punkt einer Differentialgleichung der von uns betrachteten Art charakteristisch sind, die Fundamentalgleichung und die determinirende Gleichung. Zwischen denselben besteht ein enger Zusammenhang. Wir können uns damit begnügen, diesen Zusammenhang anzugeben, ohne auf den Beweis näher einzugehen. Es gilt der

Lehrsatz: Das $\frac{1}{2\pi i}$ fache des Logarithmus jeder Wurzel der einer Differentialgleichung von der zuletzt betrachteten Art zugehörigen Fundamentalgleichung ist bis auf additive ganze Zahlen eine Wurzel der determinirenden Gleichung. Umgekehrt ist das $2\pi i$fache jeder Wurzel der determinirenden Gleichung der Logarithmus einer Wurzel der der Differentialgleichung zugehörigen Fundamentalgleichung.

§ 34.

Aufstellung von hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass die sämmtlichen Integrale sich in der Nähe des singulären Punktes $x = 0$, mit einer Potenz von x multiplicirt, durch eine gewöhnliche Potenzreihe von x darstellen lassen.

Nachdem wir die Form gefunden haben, welche die Integrale einer Differentialgleichung besitzen müssen, wenn die in § 31 angegebenen Bedingungen erfüllt sind, fragen wir nunmehr, wann die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\log x$ verschwinden — wobei wir wieder $x = 0$ als singulären Punkt annehmen — oder was dasselbe sagt, wann die Integrale die Form haben:

$$1) \qquad y = \sum g_\nu . x^{\nu + \varrho}.$$

Hierbei wollen wir wiederum der Einfachheit halber annehmen, dass die sämmtlichen Wurzeln der determinirenden Gleichung sich um ganze Zahlen unterscheiden und diese Wurzeln wie früher anordnen. Unter diesen Annahmen machen wir die Substitution:

$$2) \qquad y = x^{\varrho_n} . z.$$

Es genügt dann z einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren determinirende Gleichung als Wurzeln die positiven ganzen Zahlen besitzt:

$$\varrho_1 - \varrho_n, \quad \varrho_2 - \varrho_n, \dots \varrho_{n-1} - \varrho_n, \; 0.$$

Setzen wir:

$$\varrho_1 - \varrho_n = s - 1,$$

so gilt der

Lehrsatz: Die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass die Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung die Form haben:

$$\sum g_\nu . x^{\nu+\varrho},$$

lautet: Bildet man diejenige lineare Differentialgleichung, deren Lösungen die s^{ten} Differentialquotienten der Integrale z sind, so muss ihre determinirende Gleichung lauter positive Wurzeln, die Null eingerechnet, besitzen.

In der That, die Integrale der Differentialgleichung mit der abhängigen z, die für uns in Betracht kommen, können geschrieben werden:

$$3) \qquad z = x^\varrho[\varphi_0 + \varphi_1 . \log x + \cdots \varphi_\lambda . (\log x)^\lambda].$$

Jedenfalls ist nun der Ausdruck $x^\varrho . \varphi_\lambda$ ein Integral der vorgelegten Gleichung in z und muss zu den soeben aufgestellten gehören. Sein Exponent m kann gleich oder grösser als ϱ sein, muss aber jedenfalls kleiner sein als s. Wir wollen für den Augenblick setzen:

$$4) \qquad x^\varrho . \varphi_\lambda = x^m . \Phi(x).$$

Es lässt sich dann $\Phi(x)$ nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln, so zwar, dass das constante Glied von Null verschieden ist. Die m^{te} Ableitung von z wird den Ausdruck enthalten müssen:

$$1 . 2 \dots m . \Phi(x) . (\log x)^\lambda$$

und dieser Ausdruck kann mit keinem andern zusammengefasst werden. Unter solchen Umständen wird die m^{te} Ableitung von z höchstens zum Exponenten Null gehören und wird für $x = 0$ unendlich.

Unter solchen Umständen wird die folgende Ableitung:

$$\frac{d^{m+1} z}{d x^{m+1}}$$

höchstens zu dem negativen Exponenten -1 gehören können, die s^{te} Ableitung:

$$\frac{d^s z}{d x^s}$$

also erst recht.

Existirt also ein logarithmisches Glied, so muss die determinirende Gleichung der Differentialgleichung mit der unabhängigen Veränderlichen:

$$\frac{d^s z}{dx^s}$$

mindestens eine negative Wurzel besitzen. Ebenso gilt offenbar das Umgekehrte und damit ist der Satz bewiesen.

Es bleibt noch übrig, die Differentialgleichung zu bilden, deren Integrale die s^{ten} Differentialquotienten der Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung mit der abhängigen Veränderlichen z sind.

Nehmen wir dazu an, dass der niedrigste wirklich vorkommende Differentialquotient von z der β^{te} ist und schreiben die Differentialgleichung:

$$5)\qquad \frac{d^\beta z}{dx^\beta} = q_1 \frac{d^{\beta+1} z}{dx^{\beta+1}} + q_2 \frac{d^{\beta+2} z}{dx^{\beta+2}} + \cdots q_{n-\beta} \frac{d^n z}{dx^n}.$$

Setzt man:

$$6)\qquad u = \frac{d^\beta z}{dx^\beta},$$

so kann die Differentialgleichung geschrieben werden:

$$7)\qquad u = q_1 \cdot \frac{du}{dx} + q_2 \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \cdots q_{n-\beta} \cdot \frac{d^{n-\beta} u}{dx^{n-\beta}}.$$

Durch Differentiation erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$v = q'_1 \frac{dv}{dx} + q'_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \cdots q'_{n-\beta} \frac{d^{n-\beta} v}{dx_{n-\beta}},$$

wobei gesetzt ist:

$$8)\qquad v = \frac{d^{\beta+1} z}{dx^{\beta+1}}.$$

Diese Gleichung kann dabei keine anderen Lösungen als die $\beta + 1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $z_1, z_2, \ldots z_n$ besitzen. In dieser Weise geht es weiter. Jedenfalls sind wir im Stande, die Gleichung aufzustellen, deren Integrale die s^{ten} Differentialquotienten der Integrale von der Differentialgleichung mit der Unbekannten z sind.

Die Form, in welche wir die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen gebracht haben, ist nicht die einzige mögliche. Es sind noch andere gegeben worden, indessen sehen wir von ihrer Aufstellung ab und verweisen dieserhalb auf die hierüber erschienenen Originalarbeiten, vor allem auf die citirte von Frobenius.

§ 35.[5])

Aufstellung von linearen Differentialgleichungen, welchen doppeltperiodische Functionen zweiter Art Genüge leisten.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art gewissen linearen Differentialgleichungen Genüge leisten.

Wir bilden dazu den Ausdruck:

$$1) \qquad \vartheta_0^{\nu}(v)\,\vartheta_1^{\nu_1}(v)\,\vartheta_2^{\nu_2}(v)\,\vartheta_3^{\nu_3}(v)\prod_{l=1}^{l=m}\vartheta_1(v-a_l)\,e^{\lambda v},$$

welcher als Function von v aufgefasst den Gleichungen Genüge leistet:

$$2) \qquad \begin{cases} f(v+1) = (-1)^r e^{\lambda}.f(v), \\ f(v+\tau) = (-1)^s e^{\lambda\tau+\pi i[2a-n(2v+\tau)]}f(v), \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \nu_1+\nu_2+m &\equiv r \; mod\, 2, \\ \nu+\nu_1+m &\equiv s \; mod\, 2, \\ a_1+a_2+\cdots a_m &= a, \\ \nu+\nu_1+\nu_2+\nu_3+m &= n. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck eine ganze transcendente Function ist, so wird zwischen je $n+1$ Ausdrücken derselben Art, bei welchen die Grössen r, s, a, λ, n dieselben Werthe besitzen, mindestens eine lineare Relation bestehen müssen.

Wir bilden ferner die Ausdrücke:

$$3) \qquad \vartheta_0^{\nu+m}(v)\,\vartheta_1^{\nu_1}(v)\,\vartheta_2^{\nu_2}(v)\,\vartheta_3^{\nu_3}(v)\,\frac{d^{\mu}\varphi(v)}{dv^{\mu}},$$

wobei wir unter $\varphi(v)$ die Function verstehen:

$$4) \qquad \varphi(v) = \frac{e^{\lambda v}}{\vartheta_0^m(v)}\prod_{l=1}^{l=m}\vartheta_1(v-a_l)$$

und voraussetzen, dass ν grösser oder gleich μ ist, während μ die Werthe $1, 2, \ldots$ annehmen kann.

Die aufgestellten Functionen sind dann sämmtlich ganze transcendente Functionen von v, die auch ihrerseits den vorhin aufgestellten Gleichungen Genüge leisten. Daher folgt die Existenz von weiteren linearen Gleichungen zwischen je $n+1$ Grössen, bei denen r, s, a, λ, n die nämlichen Werthe besitzen.

Eine jede solche lineare Gleichung ist dann aber eine lineare Differentialgleichung mit der abhängigen Veränderlichen $\varphi(v)$, wenn noch festgesetzt wird, dass die Constanten a_1, $a_2, \ldots a_m$ dieselben Werthe beibehalten sollen. Dabei ist klar, dass sich nicht etwa beständig Identitäten ergeben können. Die Ordnung der Differentialgleichung kann beliebig gross gewählt werden, da für μ keine Schranke gesetzt ist. Als unabhängige Veränderliche können wir die Grösse v ansehen, aber an ihrer Stelle auch das Argument der elliptischen Functionen, die Grösse u, einführen, welche mit v durch die bekannte Relation verbunden ist. In jedem Falle sind die Coefficienten aller

solchen Differentialgleichungen gewöhnliche doppeltperiodische Functionen oder auch doppeltperiodische Functionen erster Art. Wir finden also das wichtige Resultat:

Die doppeltperiodische Function zweiter Art:

$$\varphi(v) = \frac{e^{\lambda v}}{\vartheta_0{}^m(v)} \prod_{l=1}^{l=m} \vartheta_1(v - a_l)$$

leistet unendlich vielen linearen Differentialgleichungen Genüge, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen erster Art sind.

Die Function $\varphi(v)$ ist nicht die allgemeinste doppeltperiodische Function zweiter Art — die Schlüsse bleiben aber im allgemeinen Falle genau die nämlichen, sodass wir den Satz aussprechen können:

> **Lehrsatz:** Eine jede doppeltperiodische Function zweiter Art leistet unendlich vielen linearen Differentialgleichungen Genüge, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind.

Mit derartigen Gleichungen wollen wir uns in der Folge beschäftigen, uns aber auf eine grosse Kategorie derselben beschränken, die mit dem Namen der Picard'schen bezeichnet werden möge.

§ 36.[6])

Definition der Picard'schen Differentialgleichungen. Form ihrer Integrale im allgemeinen Falle.

Wir wollen von jetzt an unter einer Picard'schen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung verstehen, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen erster Art sind, deren Integrale ferner sich sämmtlich als gebrochene transcendente Functionen darstellen lassen.

Als unabhängige Veränderliche wählen wir zunächst das Argument der elliptischen Functionen, die Grösse u. Dann existirt jedenfalls ein System linear von einander unabhängiger Integrale:

$$f_1(u), \quad f_2(u), \ldots f_n(u).$$

Als Perioden wählen wir die Grössen $2K$ und $2iK'$. Vermehren wir dann u um $2K$, so ändern nach Annahme die Coefficienten ihren Werth nicht. Es folgt hieraus, dass die Grössen

$$f_1(u + 2K), \quad f_2(u + 2K), \ldots f_n(u + 2K)$$

auch ihrerseits Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sind und zwar sind es eindeutig bestimmte Grössen, unabhängig von der Art, wie von u zu $u + 2K$ übergegangen wird. Hieraus folgt, dass die Gleichungen bestehen müssen:

$$
1) \quad \begin{cases} f_1(u+2K) = a_{11}\,.f_1(u) + a_{12}\,.f_2(u) + \cdots + a_{1n}\,.f_n(u), \\ f_2(u+2K) = a_{21}\,.f_1(u) + a_{22}\,.f_2(u) + \cdots + a_{2n}\,.f_n(u), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(u+2K) = a_{n1}.f_1(u) + a_{n2}.f_2(u) + \cdots + a_{nn}.f_n(u). \end{cases}
$$

Schliessen wir nun ganz analog wie in der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen, so folgt, dass wir die Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ so bestimmen können, dass das Integral:

$$
2) \qquad f(u) = c_1\ f_1(u) + c_2\ f_2(u) + \cdots c_n.f_n(u)
$$

der Functionalgleichung Genüge leistet:

$$
3) \qquad f(u+2K) = \mu\,.\,f(u),
$$

wobei μ eine Constante ist, und zwar eine Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades.

Wir nehmen jetzt die Functionen:

$$
4) \quad \begin{cases} \varphi_1(u) = f(u), \\ \varphi_2(u) = f(u + 2iK'), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_m(u) = f(u + 2[m-1]iK'). \end{cases}
$$

Alle diese Functionen müssen Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sein. Da dieselbe nur n linear von einander unabhängige Integrale besitzen kann, so muss einmal für $m \leqq n$ eine Relation von der Form bestehen:

$$
5) \qquad \varphi_{m+1}(u) = a_1\,.\,\varphi_1(u) + a_2\,.\,\varphi_2(u) + \cdots a_m\,.\,\varphi_m(u),
$$

wobei die Grössen a Constanten bedeuten.

Nehmen wir die Beziehungen hinzu:

$$
\varphi_1(u + 2iK') \quad = \varphi_2(u),
$$
$$
\varphi_{m-1}(u + 2iK') = \varphi_m(u),
$$

so folgt, dass wir eine lineare Verbindung der Grössen φ herstellen können, die wir durch $\varphi(u)$ bezeichnen wollen, welche der Functionalgleichung Genüge leistet:

$$
6) \qquad \varphi(u + 2iK') = \mu_1\,.\,\varphi(u),
$$

wobei μ_1 wiederum eine Constante bedeutet. Da $\varphi(u)$ überdies der Gleichung Genüge leistet:

$$
\varphi(u + 2K) = \mu\,.\,\varphi(u),
$$

so folgt, dass es eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist. Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz, welcher der ganzen folgenden Theorie zu Grunde gelegt wird:

Lehrsatz: Eine jede Picard'sche Differentialgleichung hat jedenfalls ein Integral, welches eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist.

Wir wollen zusehen, welche Form die anderen Integrale haben. Nennen wir das doppeltperiodische Integral:

7) $$y_1 = \varphi(u),$$

so wollen wir setzen:

8) $$y = \varphi(u)\int z\,du.$$

Die Gleichung in z ist dann von der Ordnung $n-1$ und hat als Coefficienten, wie aus den Betrachtungen von § 83 des ersten Bandes hervorgeht, als Coefficienten gewöhnliche doppeltperiodische Functionen — wobei wir uns den Coefficienten des höchsten Differentialquotienten von y gleich 1 gesetzt denken. — Eine solche Differentialgleichung hat dann nach dem fundamentalen Lehrsatz mindestens ein Integral, welches sich als doppeltperiodische Function zweiter Art darstellen lässt. Wir wollen dasselbe durch z_1 bezeichnen, so ist:

$$y_2 = \varphi(u)\int z_1\,du$$

ein zweites Integral der ursprünglich vorgelegten Gleichung. Die Form desselben ist in einfacher Weise klarzulegen. In der That, wir können z_1 schreiben:

9) $$z_1 = \sum\left[A_0 . f(u-\beta) + \cdots A_r \frac{d^r f(u-\beta)}{du^r}\right],$$

wobei die Summe über alle Unendlichkeitspunkte von z_1 zu erstrecken und für den Augenblick gesetzt ist:

10) $$f(u) = \frac{\vartheta_1(v+\omega)}{\vartheta_1(v)}\,e^{\lambda v}.$$

ω und λ sind zwei geeignet gewählte Constanten. Integriren wir und berücksichtigen, dass vermöge unserer Annahmen der logarithmische Theil verschwinden muss, so folgt:

11) $$y_2 = \varphi(u)\sum\left[A_1 f(u-\beta) + \cdots A_r \frac{d^{r-1} f(u-\beta)}{du^{r-1}}\right]$$

und dieser Ausdruck ist wiederum eine doppeltperiodische Function zweiter Art. Freilich muss hinzugefügt werden, dass dieses Resultat nicht in jedem Falle richtig ist. Wenn die Function z_1 doppeltperiodisch von der ersten Art ist, so modificiren sich die Resultate, da die analytische Darstellung von z_1 eine andere wird. Ebenso modificiren sich die Resultate, wenn die Multiplicatoren μ und μ_1 von z_1 die Form haben:

$$\mu = e^{2hK}, \quad \mu_1 = e^{2hiK'}.$$

Auf beide Fälle soll in der Folge eingegangen werden. Jetzt sehen wir von ihnen ab und beschränken uns auf den ersten Fall, den wir als den allgemeinen bezeichnen wollen, dann folgt, dass auch ein zweites Integral doppeltperiodisch von der zweiten Art ist. Gehen wir so weiter, so finden wir den

Lehrsatz: Die Picard'schen Differentialgleichungen besitzen im allgemeinen Falle als n von einander linear unabhängige Integrale n doppeltperiodische Functionen zweiter Art.

§ 37.

Analytische Darstellung der Picard'schen Differentialgleichungen. Scheinbare und wirkliche singuläre Punkte. Reduction der allgemeinen Form auf eine specielle.

Nachdem wir über die Natur der Integrale einer Picard'schen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung einstweilen in's Klare gekommen sind, wollen wir jetzt die analytische Form und die Eigenschaften der Differentialgleichungen selbst etwas näher untersuchen. Die Coefficienten der Picard'schen Gleichungen sollen doppeltperiodische Functionen sein. Dieselben können beliebig viele singuläre Punkte besitzen. Da ihre Integrale sämmtlich gebrochene transcendente Functionen sein sollen, so können die Coefficienten $p_1, p_2, \dots p_n$ der vorgelegten Differentialgleichung:

$$\text{1)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots p_n \cdot y = 0$$

in den einzelnen Punkten resp. höchstens von der Ordnungszahl $1, 2, \dots n$ unendlich gross werden.

Die doppeltperiodischen Functionen sind nun in § 18 und 82 des ersten Bandes in mehrfache Formen gebracht worden.

Setzen wir für den Augenblick:

$$f(v) = \frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)},$$

so folgt aus den citirten Darstellungen, dass die Coefficienten die Form haben müssen:

$$\text{2)} \quad \begin{cases} p_1 = c_0 + \sum c_{r0} \cdot f(v - b_r), \\ p_2 = c'_0 + \sum c'_{r0} \cdot f(v - b_r) + \sum c'_{r1} \dfrac{df(v - b_r)}{du}, \\ p_3 = c''_0 + \sum c''_{r0} \cdot f(v - b_r) + \sum c''_{r1} \dfrac{df(v - b_r)}{du} + \sum c''_{r2} \dfrac{d^2 f(v - b_r)}{du^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

wobei $\sum c_{r0} = 0$ etc. ist und die Summe über die einzelnen Unendlichkeitspunkte zu erstrecken ist.

Wir können den Coefficienten aber auch noch andere Formen geben.

Nehmen wir an, dass eine doppeltperiodische Function die Unendlichkeitspunkte $-b_r + \frac{\tau}{2}$ besitzt, so können wir sie, von einem unwesentlichen Factor abgesehen, schreiben:

$$3)\qquad \frac{\vartheta_1(v+a_1)\,\vartheta_1(v+a_2)\ldots\vartheta_1(v+a_m)}{\vartheta_0(v+b_1)\,\vartheta_0(v+b_2)\ldots\vartheta_0(v+b_m)}\,e^{m v \pi i},$$

wobei die Beziehung besteht:

$$a_1 + a_2 + \cdots a_m - \frac{m\tau}{2} = b_1 + b_2 + \cdots b_m + m_1$$

und m_1 eine ganze Zahl bedeutet. Wir wollen nun annehmen, dass die Grössen b alle von einander verschieden sind oder was dasselbe sagt, dass die Unendlichkeitspunkte alle von der ersten Ordnung sind. Dann folgt, dass wir setzen können:

$$4)\quad \begin{cases} \vartheta_1(v+a_1)\vartheta_1(v+a_2)\ldots\vartheta_1(v+a_m)e^{m v \pi i} = c_1 \prod \vartheta_0(v+b_r) + \vartheta_1(v+b_1)S, \\ S = \sum_{r=2}^{r=m} c_r \vartheta_0(v+b_2)\ldots\vartheta_0(v+b_{r-1})\vartheta_1(v+b_r)\vartheta_0(v+b_{r+1})\ldots\vartheta_0(v+b_m), \end{cases}$$

oder also wir finden die Form:

$$5)\qquad p_1 = c_1 + sn(u+\beta_1)\sum_{r=2}^{r=m} c_r . sn(u+\beta_r),$$

wobei die Grössen β die den Grössen b entsprechenden Argumente der elliptischen Functionen sind. Die Grössen c in der letzten Formel sind verschieden von den Grössen c in der vorletzten.

Wir wollen zweitens annehmen, dass die Unendlichkeitspunkte sämmtlich von der zweiten Ordnung sind, so können wir die vorgelegte Function schreiben:

$$6)\qquad \frac{\vartheta_1(v+a_1)\ldots\vartheta_1(v+a_{2m})}{\vartheta_0^2(v+b_1)\ldots\vartheta_0^2(v+b_m)}\,e^{2 m v \pi i}.$$

Dann folgt die Richtung des Ansatzes:

$$\vartheta_1(v+a_1)\ldots\vartheta_1(v+a_{2m})\,e^{2 m v \pi i} = c_1 \prod \vartheta_0^2(v+b_r) + S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \vartheta_1(v+b_1)\,\vartheta_0(v+b_1)\sum_{r=2}^{r=m} c_r \vartheta_0^2(v+b_2)\ldots\vartheta_1(v+b_r)\vartheta_0(v+b_r)\ldots\vartheta_0^2(v+b_m),$$

$$S_2 = \sum_{s=1}^{s=m} c_{m+s}\vartheta_0^2(v+b_1)\ldots\vartheta_1^2(v+b_s)\ldots\vartheta_0^2(v+b_m).$$

Unter solchen Umständen folgt die Richtigkeit des Ansatzes:

$$7)\quad p_2 = c_1 + sn(u+\beta_1)\sum c_r . sn(u+\beta_r) + \sum c_{m+s} . sn^2(u+\beta_s).$$

Hierbei ist die Annahme gemacht, dass alle Unendlichkeitspunkte von der Ordnungszahl 2 sind. Ist dasselbe nicht der Fall, vielmehr einige von der Ordnungszahl 1, so modificiren sich die Resultate in unwesentlicher Weise.

Aehnlich sind die folgenden Coefficienten aufzustellen, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

Bei anderer Bezeichnungsweise der Unendlichkeitspunkte ergeben sich andere Darstellungsformen, die aber so unmittelbar aus der letzten folgen, dass von ihrer Aufstellung füglich abgesehen werden kann.

Damit nun unsere Differentialgleichung eine Picard'sche sei, müssen die im § 34 angegebenen Bedingungen erfüllt sein.

Wir wollen die Unendlichkeitspunkte der Coefficienten in zwei Kategorien theilen. Erstens ist es möglich, dass dieselben auch in den Integralen vorkommen, zweitens ist es möglich, dass die Integrale sie nicht enthalten. Die erste Kategorie wollen wir wirklich singuläre, die zweite scheinbar singuläre Punkte nennen. Es ist nicht schwer, für die letzteren eine obere Grenze anzugeben.

In der That, nennen wir ein Fundamentalsystem von Integralen:

$$f_1(u), \dots f_n(u),$$

so lautet die dazu gehörende Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} y & f_1(u) \dots f_n(u) \\ y' & f'_1(u) \dots f'_n(u) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^{(n)} & f_1^{(n)}(u) \dots f_n^{(n)}(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei können wir den sämmtlichen Integralen die Form geben:

$$\frac{\vartheta_1(v-a_1)\dots\vartheta_1(v-a_m)}{\vartheta_1(v-b_1)^{m_1}\dots\vartheta_1(v-b_r)^{m_r}}\, e^{\lambda v}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots m_r = m.$$

Hierbei sind unter den Zahlen $-m_1, -m_2, \cdots m_r$ die kleinsten negativen Wurzeln der determinirenden Gleichungen zu verstehen, die bez. zu den singulären Punkten $b_1, \dots b_r$ gehören.

Führen wir die Determinante aus, so erhalten wir die Differentialgleichung in der Form:

$$8)\qquad P_0 . y^{(n)} + P_1 . y^{(n-1)} + \cdots P_n . y = 0$$

und es ist daher:

$$p_1 = \frac{P_1}{P_0}, \quad p_2 = \frac{P_2}{P_0}, \dots p_n = \frac{P_n}{P_0}.$$

Die Zahl der scheinbar singulären Punkte kann nun, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht, höchstens gleich der Zahl der Nullpunkte von P_0 sein. Die Zahl dieser Punkte ist aber gleich der Zahl der Unendlichkeitspunkte von P_0. Wir wollen dieselbe durch μ bezeichnen, so kommt unser Problem darauf hinaus, für μ eine obere Grenze zu finden. Die Function P_0 kann nur in den Punkten $b_1, \ldots b_r$ unendlich werden. Die Ordnungszahlen mögen resp. $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$ sein, so folgt:

$$\mu = \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots \varrho_r.$$

Verstehen wir unter b irgend einen der Punkte $b_1, b_2, \ldots b_r$, so kann gesetzt werden:

$$f_h(u) = \left(\frac{1}{u - \beta}\right)^{m'} [A_0^{(h)} + A_1^{(h)}(u-\beta) + A_2^{(h)}(u-\beta)^2 + \cdots],$$
$$h = 1, 2, \ldots n,$$

wobei m' der zu b resp. β gehörende Exponent ist, der aus der determinirenden Gleichung bestimmt werden kann. Setzen wir nun

$$\begin{aligned} F_1(u) &= f_1(u), \\ F_2(u) &= c_{12} \cdot f_1(u) + f_2(u), \\ F_3(u) &= c_{13} \cdot f_1(u) + c_{23} \cdot f_2(u) + f_3(u), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_n(u) &= c_{1n} \cdot f_1(u) + \cdots f_n(u), \end{aligned}$$

so können die Constanten c so gewählt werden, dass im Punkte β:

$F_1(u)$ von der m'^{ten}

$F_2(u)$ von der $m' - 1^{\text{ten}}$

. . . .

$F_n(u)$ von der $m' - n + 1^{\text{ten}}$

Ordnung höchstens unendlich gross wird. Da nun nach bekannten Sätzen der Determinantentheorie der Ausdruck für P_0 ungeändert bleibt, wenn wir $f_1(u), f_2(u) \ldots f_n(u)$ resp. durch $F_1(u), F_2(u) \ldots F_n(u)$ ersetzen, so können wir aus dem soeben gefundenen Ergebniss schliessen, dass die Function P_0 im Punkte β von der $m'n^{\text{ten}}$ Ordnung höchstens unendlich gross wird. Wir haben also höchstens:

$$\varrho_1 = nm_1, \quad \varrho_2 = nm_2, \ldots \quad \varrho_r = nm_r,$$

sodass sich ergiebt: $\mu = n(m_1 + \cdots m_r)$, oder also:

$$\mu = mn. \tag{9}$$

Damit ist das Problem gelöst. Wir finden den

Lehrsatz: Bezeichnet $-m$ die Summe der niedrigsten negativen Wurzeln der determinirenden Gleichungen, die zu den einzelnen singulären Punkten einer Picard'schen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gehören, so ist die Zahl der scheinbar singulären Punkte höchstens gleich mn.

Die Entscheidung, ob ein Punkt ein scheinbarer oder wirklich singulärer Punkt der Picard'schen Differentialgleichung ist, kann unmittelbar mit Hülfe der determinirenden Gleichung getroffen werden. In der That, ein Punkt ist dann und nur dann ein scheinbar singulärer Punkt, wenn die sämmtlichen Wurzeln der determinirenden Gleichung positiv oder Null sind.

Es möge nun eine Picard'sche Gleichung vorgelegt sein, welche eine Anzahl singulärer Stellen besitzt. Eine derselben können wir immer beliebig wählen, wir wollen sie gleich iK' setzen. Dann wollen wir die wirklich singulären Punkte, welche ausser iK' vorkommen, durch $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ bezeichnen und annehmen, dass die kleinsten Wurzeln der determinirenden Gleichungen, die zu diesen Punkten gehören, resp. $m_1, m_2, \ldots m_r$ sind. Wir setzen dann:

$$y = z \,.\, e^{\lambda v} \prod \frac{\vartheta_1^m(v-\beta)}{\vartheta_0^m(v)} \, e^{\frac{\vartheta'_0(\beta)}{\vartheta_0(\beta)} v},$$

wo das Product über alle soeben definirten Werthe von β zu erstrecken ist. Dann leistet z wiederum einer Picard'schen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung Genüge, wie aus den Betrachtungen von § 83 etc. des ersten Bandes hervorgeht. Aus den Untersuchungen, die wir in der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen angestellt haben, folgt dann unmittelbar, dass die determinirenden Gleichungen für die Differentialgleichung mit der abhängigen Veränderlichen z, die zu den Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ gehören, lauter positive (die Null einbegriffen) Wurzeln besitzen, dass also für die neue Gleichung die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ nur scheinbar singuläre Punkte sind. Ist aber die ursprüngliche Picard'sche Gleichung gegeben, so kann die neue unmittelbar abgeleitet werden. Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Die Integration einer jeden Picard'schen Differentialgleichung kann durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen auf die Theorie einer anderen zurückgeführt werden, welche nur einen wirklich singulären Punkt und zwar den Punkt $u = iK'$, daneben lauter scheinbar singuläre Punkte besitzt, deren Integrale also alle die Form haben:

$$\frac{\vartheta_1(v-a_1)\,\vartheta_1(v-a_2)\ldots\vartheta_1(v-a_m)\,e^{\lambda v}}{\vartheta_0{}^m(v)}.$$

Hiermit sind wir zu Differentialgleichungen gelangt, deren Integrale eine besonders einfache Form haben. Die Coefficienten freilich werden im Allgemeinen eine complicirtere Form als die der ursprünglich vor-

gelegten besitzen, sodass es nicht in allen Fällen gewiesen ist, die genannte Transformation vorzunehmen. In Bezug auf die letzten Betrachtungen wird auf die citirten Arbeiten von Naetsch verwiesen.

§ 38.

Untersuchung der Picard'schen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Nachdem einige allgemeine Sätze über Picard'sche Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung aufgestellt worden sind, wollen wir jetzt specielle Ordnungszahlen in Betracht ziehen und nehmen zunächst den Fall $n = 1$. Als allgemeine Form derartiger Gleichungen können wir die Form wählen:

$$1) \qquad \frac{dy}{du} + \left(c_0 + \sum c_r \, . \, sn\,u \, . \, sn(u + \alpha_r)\right) y = 0,$$

wobei die Summe über die vorgelegten singulären Punkte zu erstrecken ist. Setzen wir an Stelle von

$$u : u + iK', \text{ von } \alpha_r : \alpha_r + iK',$$

so können wir an Stelle der letzten Gleichung auch die folgende wählen:

$$2) \qquad \frac{dy}{du} + \left(c_0 + \sum c_r \frac{sn(u + \alpha_r)}{sn\,u}\right) y = 0.$$

Die Betrachtung der Fundamentalgleichung zeigt, dass die sämmtlichen Grössen $c_1 \, . \, sn\,\alpha_1$, $c_2 \, . \, sn\,\alpha_2, \ldots$ ganze Zahlen sein müssen. Bezeichnen wir sie durch g_1, g_2 etc., so lautet die allgemeinste Picard-sche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$3) \qquad \frac{dy}{du} + \left(c_0 + \sum g_r \frac{sn(u + \alpha_r)}{sn\,\alpha_r \, . \, sn\,u}\right) y = 0.$$

Die Integration derselben bietet keine Schwierigkeit. Setzen wir:

$$4) \qquad \varphi(v) = \frac{\vartheta_0(v + a)}{\vartheta_1(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v},$$

so leistet $\varphi(v)$, wie aus dem 83. Paragraphen des ersten Bandes folgt, der Gleichung Genüge:

$$\frac{d\,log\,\varphi(v)}{du} = \frac{cn\,\alpha \, . \, dn\,\alpha}{sn\,\alpha} - \frac{sn(u + \alpha)}{sn\,\alpha \, . \, sn\,u}.$$

Daraus folgt als Integral unserer Gleichung:

$$5) \qquad y = e^{\lambda u} \prod \varphi_r(v)^{g_r},$$

wenn gesetzt ist:

6) $$\varphi_r(v) = \frac{\vartheta_0(v+a_r)}{\vartheta_1(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}$$

und:

7) $$\lambda = -\left(c_0 + \sum g_r \frac{cn\,\alpha_r \,.\, dn\,\alpha_r}{sn\,\alpha_r}\right).$$

Wir können das gefundene Resultat auch so aussprechen:

Lehrsatz: Die allgemeinste Picard'sche Differentialgleichung erster Ordnung kann in die Form gebracht werden:

$$\frac{dy}{du} + \left(c_0 + \sum g_r \frac{sn(u+\alpha_r)}{sn\,\alpha_r \,.\, sn\,u}\right) y = 0,$$

wobei c_0 eine willkürliche Constante, die Grössen g dagegen ganze Zahlen bedeuten. Ihr Integral lautet:

$$y = e^{\lambda u} \prod \frac{\vartheta_0^{g_r}(v+a_r)}{\vartheta_1^{g_r}(v)} e^{-g_r \frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}$$

$$\lambda = -\left(c_0 + \sum g_r \frac{cn\alpha_r \,.\, dn\alpha_r}{sn\,\alpha_r}\right).$$

§ 39.[7])

Untersuchung der Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten einen singulären Punkt haben.

Wir gehen jetzt zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung über und zwar nehmen wir zunächst diejenigen, deren Coefficienten einen singulären Punkt besitzen. Als solchen sind wir berechtigt den Punkt

$$u = iK'$$

zu wählen. Nach unseren allgemeinen Untersuchungen haben dann alle Differentialgleichungen dieser Art die Form:

1) $$\frac{d^2y}{du^2} + c_0 \frac{dy}{du} = y(c_1 + c_2 sn^2 u).$$

Zunächst folgt, dass wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, die Constante c_0 der Null gleich setzen können. In der That, ist c_0 von Null verschieden, so setzen wir an Stelle von y die Grösse $y \,.\, e^{\lambda u}$. Dann kann λ immer so bestimmt werden, dass der Coefficient von $\frac{dy}{du}$ in der transformirten Gleichung verschwindet. Bilden wir ferner die determinirende Gleichung, so lautet dieselbe:

2) $$\varrho(\varrho - 1) = \frac{c_2}{k^2}$$

oder also es folgt:

$$c_2 = k^2 . \varrho(\varrho - 1).$$

Setzen wir an Stelle von ϱ: $-m$, so nimmt die Differentialgleichung die Form an:

$$3)\qquad \frac{d^2y}{du^2} = y[c + m(m+1) \,.\, k^2 sn^2 u].$$

Umgekehrt folgt unmittelbar, dass, wenn m eine positive ganze Zahl ist, diese Differentialgleichung als Integrale gebrochene transcendente Functionen besitzen muss. Mit ihrer Integration wollen wir uns beschäftigen, wobei zu bemerken ist, dass diese Gleichung unter dem Namen der Lamé'schen bekannt und zuerst von Hermite vollkommen integrirt worden ist.

Nach den Sätzen von Picard haben ihre Integrale die Form:

$$4)\qquad y = e^{\lambda v} \prod_{r=1}^{r=m} \frac{\vartheta_1(v + a_r)}{\vartheta_0(v)}.$$

Die Betrachtungen gestalten sich nun, wie aus den Untersuchungen des § 84 des ersten Bandes folgt, besonders einfach, wenn wir den Exponentialfactor so wählen, dass zu jedem Factor des Products ein entsprechender Exponentialfactor:

$$e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}$$

hinzugezogen wird, oder also, wenn wir setzen:

$$5)\qquad y = e^{\lambda v} \prod \frac{\vartheta_1(v + a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}.$$

Dann aber folgt, dass λ jedenfalls der Null gleich sein muss. Es ergiebt sich dieses Resultat durch Entwickelung um den Punkt $u = iK'$ herum, wenn wir die Resultate von § 84 des ersten Bandes hinzunehmen. Zweitens folgt, dass die Grössen a_r jedenfalls im Allgemeinen von einander verschieden sein müssen.

In der That, wäre dasselbe nicht der Fall, käme $-a_1 : l$ mal vor, $l > 1$, so könnten wir setzen:

$$y = \left(\frac{\vartheta_1(v + a_1)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_1)}{\vartheta_0(a_1)} v}\right)^l y_1,$$

wo nun y_1 für $v = -a_1$ nicht mehr gleich Null wird. Setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung ein, so würde sich ergeben, dass:

$$\vartheta'_1(v + a_1) = 0$$

sein müsste für $v = -a_1$, was nicht angeht.

Wir nehmen an, dass die Grössen a_r auch vom Zeichen abgesehen von einander verschieden sein sollen.

Drittens bleibt die **Lamé**'sche Gleichung ungeändert, wenn wir an Stelle von v uns $-v$ eingesetzt denken.

Ist also:

$$y = \prod \frac{\vartheta_1(v + a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}$$

ein Integral der Differentialgleichung, so ist es:

$$y = \prod \frac{\vartheta_1(v - a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}$$

auch. Es handelt sich darum, die Grössen a_r so zu bestimmen, dass der genannte Ausdruck ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung wird.

Dazu setzen wir:

$$6) \qquad \varphi_r(u) = \frac{\vartheta_1(v + a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v},$$

$$7) \qquad \varphi(u) = \prod_{r=1}^{r=m} \varphi_r(u),$$

dann ergiebt sich durch Differentiation:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} &= \varphi(u) \sum \frac{1}{\varphi_r(u)} \frac{d^2\varphi_r(u)}{du^2} \\ &+ 2\varphi(u) \sum \frac{1}{\varphi_r(u)\varphi_l(u)} \frac{d\varphi_r(u)}{du} \frac{d\varphi_l(u)}{d(u)}, \end{aligned} \right.$$

wobei die Summen in einfacher, nicht näher anzugebender Weise zu erstrecken sind. Diesen Ausdruck setzen wir in die Differentialgleichung ein und setzen dann $u = -\alpha_r$. Die rechte Seite verschwindet für diesen Werth von u, die linke also auch. Nun ist aber:

$$\frac{d^2\varphi_r(u)}{du^2} = \varphi_r(u)(2k^2 sn^2 u - 1 - k^2 + k^2 sn^2 \alpha_r),$$

also verschwindet auf der linken Seite die erste Summe und es bleibt nur die zweite zu untersuchen übrig. Aus ihr sind alle diejenigen Glieder herauszugreifen, bei denen ein Factor den Index r hat, da die andern verschwinden, sodass wir die Summe erhalten:

$$\frac{2\varphi(u)}{\varphi_r(u)} \frac{d\varphi_r(u)}{du} \sum' \frac{d\varphi_l(u)}{du} \frac{1}{\varphi_l(u)},$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass dieselbe über alle l von 1 bis m zu nehmen ist, mit Ausnahme von $l = r$. Dieser Ausdruck muss dann gleich Null sein, wenn wir der Reihe nach

$$u = -\alpha_r, \quad r = 1, 2, \ldots m$$

einsetzen.

Wir erhalten demgemäss unter Fortlassung der nicht verschwindenden Factoren die Gleichungen:

$$\sum{}' \frac{d\varphi_l(u)}{du} \frac{1}{\varphi_l(u)} = 0$$

für $u = -\alpha_r$, $r = 1, 2, \ldots m$.

Nun ist aber:

$$\frac{d\varphi_l(u)}{du} = \varphi_l(u) \frac{snu \,.\, cnu \,.\, dnu - sn\alpha_l \,.\, cn\alpha_l \,.\, dn\alpha_l}{sn^2 u - sn^2 \alpha_l},$$

sodass wir das Gleichungssystem erhalten:

$$8) \qquad \sum{}_l' \frac{sn\alpha_l \,.\, cn\alpha_l \,.\, cn\alpha_l + sn\alpha_r \,.\, cn\alpha_r \,.\, dn\alpha_r}{sn^2\alpha_r - sn^2\alpha_l} = 0.$$

Wir wollen nun der Einfachheit halber setzen:

$$x_r = sn^2\alpha_r,$$
$$u_r = sn\alpha_r \,.\, cn\alpha_r \,.\, dn\alpha_r,$$

so können wir den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz: Damit die durch Gleichung 7) definirte Function ein Integral der Lamé'schen Differentialgleichung wird, müssen die Gleichungen bestehen:

$$9) \qquad \sum{}_l' \frac{u_r + u_l}{x_r - x_l} = 0, \quad r = 1, 2, \ldots m.$$

Wir können die Gleichungen in eine andere Form bringen. Dazu denken wir uns die Gleichung gebildet, deren Wurzeln die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_m$ sind. Dieselbe möge lauten:

$$10) \qquad f(x) = x^m + p_1 \,.\, x^{m-1} + \cdots p_m = 0$$

Wir wollen ferner setzen:

$$11) \qquad f_l(x) = \frac{f(x)}{x - x_l},$$

so nimmt das Gleichungssystem die Form an:

$$12) \qquad \sum_1^m{}' u_l \,.\, f_l'(x_r) = 0.$$

Dasselbe kann nach den Grössen u_l leicht aufgelöst werden. In der That, es ist:

$$\begin{cases} f_l(x) = x^{m-1} + (p_1 + x_l)x^{m-2} + (p_2 + p_1 x_l + x_l^2)x^{m-3} + \cdots \\ \qquad\qquad + (p_{m-1} + p_{m-2}x_l + \cdots x_l^{m-1}), \end{cases}$$

also folgt:

$$f_l'(x_r) = (m-1)x_r^{m-2} + (m-2)(p_1 + x_l)x_r^{m-3} + \cdots p_{m-2} + p_{m-3}x_l + \cdots x_l^{m-2}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir ein bekanntes Gleichungssystem der Algebra, aus welchem sich die Beziehungen ergeben:

13) $$u_1 . f'(x_1) = u_2 . f'(x_2) = \cdots u_m . f'(x_m).$$

Aus diesen Gleichungen sind die Grössen x_r zu bestimmen und zwar folgen wir bei ihrer Bestimmung dem Vorgange von Sparre. Wir bezeichnen dazu den gemeinsamen Werth der Grössen:

$$u_r f'(x_r)$$

mit L, so folgt durch Quadriren:

$$L^2 = x_1(1 - x_1)(1 - k^2 x_1) f'(x_1)^2 = \cdots x_m(1 - x_m)(1 - k^2 x_m) f'(x_m)^2.$$

Unter solchen Umständen wird die Gleichung:

14) $$x(1 - x)(1 - k^2 x) f'(x)^2 - L^2 = 0,$$

welche vom Grade $2m + 1$ ist, die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ besitzen, und muss sich in Folge dessen die linke Seite schreiben lassen:

15) $$x(1 - x)(1 - k^2 x) f'(x)^2 - L^2 = f(x)\varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ eine ganze Function vom Grade $m + 1$ ist. Differenziren wir, so erhalten wir:

$$\begin{cases} f'(x)[(1 - 2[1 + k^2]x + 3k^2x^2) f'(x) + 2(x - [1 + k^2]x^2 + k^2x^3) f''(x)] \\ \qquad = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x). \end{cases}$$

Nun sind die Wurzeln von $f(x)$ alle von einander verschieden, also haben $f'(x)$ und $f(x)$ keinen Theiler gemeinsam. Unter solchen Umständen muss $\varphi'(x)$ durch $f'(x)$ theilbar sein oder also es folgt unter Berücksichtigung des Grades von $\varphi'(x)$ die Gleichung:

16) $$\varphi'(x) = (Ax + B) f'(x).$$

Setzt man daher:

17) $$\varphi_1(x) = [1 - 2(1 + k^2)x + 3k^2x^2] f'(x) + 2[x - (1 + k^2)x^2 + k^2x^3] f''(x),$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + (Ax + B) f(x).$$

Wir differenziren noch einmal und ersetzen $\varphi'(x)$ durch:

$$(Ax + B) f'(x),$$

so ergiebt sich:

$$\varphi'_1(x) = 2(Ax + B) f'(x) + A f(x).$$

Diese Gleichung führt zu Recursionsformeln für die Grössen p. In der That, es ist:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{r=m} p_r . x^{m-r}, \quad p_0 = 1.$$

Unter solchen Umständen wird:

$$f'(x) = \sum_{0}^{m} (m - r) p_r x^{m-r-1},$$

$$f''(x) = \sum (m - r)(m - r - 1) p_r . x^{m-r-2}.$$

Setzen wir also:

$$\text{18)} \qquad \varphi_1(x) = \sum_{-1}^{m} q_r . x^{m-r},$$

so erhält q_r den Werth:

$$\text{19)} \quad \begin{cases} q_r = p_{r-1}(m - r + 1)(2m - 2r + 1) - 2(1 + k^2)(m - r)^2 p_r \\ \quad + k^2(m - r - 1)(2m - 2r - 1) p_{r+1}, \end{cases}$$

wobei $p_r = 0$ für $r < 0$ und $r > m$ anzunehmen ist.

Ferner erhalten wir:

$$2(Ax + B) f'(x) + A f(x) = \sum_{-1}^{m-1} [A(2m - 2r - 1) p_{r+1} + 2B(m - r) p_r] x^{m-r-1}.$$

Durch Vergleichung ergeben sich $m + 1$ Gleichungen von der Form:

$$\text{20)} \begin{cases} (m-r)[p_{r-1}(m-r+1)(2m-2r+1) - 2(1+k^2) p_r (m-r)^2 + k^2(m-r-1)(2m-2r-1) p_{r+1}] \\ \qquad = A(2m - 2r - 1) p_{r+1} + 2B(m - r) p_r. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen lauten:

$$k^2 . m(m + 1)(2m + 1) = A(2m + 1),$$

$$m[- 2(1 + k^2) m^2 + k^2(m - 1)(2m - 1) p_1] = A(2m - 1) p_1 + 2Bm,$$

sodass wir für A und B die Werthe erhalten:

$$\text{21)} \qquad A = m(m + 1) k^2,$$

$$\text{22)} \qquad B = -(1 + k^2) m^2 - k^2(2m - 1) p_1.$$

Setzen wir diese Werthe in die Recursionsformel ein, so ergiebt sich die folgende Beziehung zwischen den Coefficienten p:

$$\text{23)} \quad \begin{cases} D_{r+1} . p_{r+1} = D_{r-1} . p_{r-1} + D_r . p_r, \\ D_{r-1} = (m - r)(m - r + 1)(2m - 2r + 1), \\ D_r \;\; = [r(2m - 1)(1 + k^2) + k^2(2m - 1) p_1] 2(m - r), \\ D_{r+1} = k^2(2m - 2r - 1)(r + 1)(2m - r). \end{cases}$$

Vermöge dieser Formeln lassen sich die sämmtlichen Coefficienten p berechnen, sobald der eine Coefficient p_1 gegeben ist. Um auch diesen zu berechnen, genügen die bisherigen Betrachtungen nicht, vielmehr müssen die Entwickelungen um den singulären Punkt hinzugenommen werden. Die Vergleichung des Factors von:

$$(u - iK')^{-m}$$

links und rechts unter Hinzunahme der Entwickelungen von § 83 und § 84 des ersten Bandes ergiebt dann:

$$24) \qquad p_1 = -\sum x_r = -\frac{c_0 + m^2(1+k^2)}{(2m-1)k^2}.$$

Damit sind die sämmtlichen Coefficienten der algebraischen Gleichung mit der Unbekannten $sn^2\alpha_r$ bestimmt, diese also auch. Die Grössen $sn\alpha_r$ sind demgemäss nur bis auf das Vorzeichen bestimmt, da aber die Gleichungen bestehen:

$$25) \qquad sn\alpha_1 . cn\alpha_1 . dn\alpha_1 f'(x_1) = sn\alpha_2 . cn\alpha_2 . dn\alpha_2 f'(x_2) = \cdots,$$

so folgt, dass nur das Zeichen von einer der Grössen α willkürlich ist, während das der anderen dann eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun noch den gemeinsamen Werth aller dieser Grössen bestimmen.

Wir gehen dazu von der Gleichung aus:

$$[x - (1+k^2)x^2 + k^2x^3] f'(x)^2 - L^2 = f(x)\varphi(x),$$

wobei die Beziehung besteht:

$$\varphi'(x) = (Ax + B) f'(x).$$

Setzt man daher:

$$26) \qquad F(x) = \int_0^x f(x)\,d(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + p_1 \frac{x^m}{m} + \cdots p_m x,$$

so ergiebt sich:

$$\varphi(x) = (Ax + B) f(x) - AF(x) + D,$$

wobei D eine unbekannte Constante bedeutet. Unter solchen Umständen nimmt die Gleichung für L die folgende Form an:

$$[x - (1+k^2)x^2 + k^2x^3] f'(x)^2 - L^2 = (Ax+B) f(x)^2 - A F(x) f(x) + D f(x).$$

Durch Vergleichung des constanten Gliedes und des Factors von x links und rechts erhalten wir:

$$-L^2 = B . p_m^2 + D . p_m,$$

$$p_{m-1}^2 = A . p_m^2 + 2B . p_m . p_{m-1} - A . p_m^2 + D . p_{m-1}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$L^2 = p_m(Bp_m - p_{m-1}),$$

oder also indem wir den gefundenen Werth für B einsetzen:

$$27) \qquad L^2 = -p_m[p_{m-1} + p_m[(1+k^2)m^2 + (2m-1)k^2p_1]].$$

Damit sind wir am Ziel, denn dass nunmehr keine weiteren Bedingungen zu erfüllen sind, braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden. Wir können demnach die Betrachtungen in dem folgenden Lehrsatz zusammenfassen:

Lehrsatz: Die Lamé'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{du^2} = y[c_0 + m(m+1)k^2sn^2u]$$

besitzt als vollständiges Integral die Grösse:

$$J = c_1J_1 + c_2J_2,$$

wobei gesetzt ist:

$$J_1 = \prod \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}v},$$

$$J_2 = \prod \frac{\vartheta_1(v-a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}v}.$$

Die Grössen $sn^2\alpha_r$ sind als Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades darstellbar, deren Coefficienten eindeutig nach gegebenen Regeln durch c_0 darstellbar sind, die Grössen α_r selbst sind vermöge einer weiteren Beziehung bis auf das Vorzeichen einer einzigen — von der Reihenfolge abgesehen — eindeutig bestimmt.

Wir haben die Auflösung der Lamé'schen Differentialgleichung durch Integrale, die in der Productform dargestellt sind, hiermit in voller Ausführlichkeit gegeben. Hierbei zeigte sich die Auflösung einer Gleichung m^{ten} Grades nothwendig. Es liegt hierin eine gewisse Schwierigkeit, und es fragt sich, ob dieselbe in der Natur der Sache begründet ist. Die Integrale sind symmetrisch in Bezug auf die Grössen α_r und es liegt unter solchen Umständen nahe, zu fragen, ob nicht die Auflösung der Gleichung m^{ten} Grades vermieden werden kann und es genügt, die Coefficienten derselben zu kennen. Die Richtigkeit dieser Annahme zeigt sich, sobald die Darstellung der doppeltperiodischen Functionen in der Summenform hinzugenommen wird.

Die hieraus sich ergebende zweite Darstellungsform der Integrale der Lamé'schen Gleichung ist in mehreren Arbeiten, vor allem von Hermite und Sparre in ebenso ausführlicher wie eleganter Weise gegeben worden. Wir wollen hier nicht in derselben ausführlichen Weise vorgehen, sondern, nachdem die Darstellung in der Productform eingehend behandelt worden ist, uns im Wesentlichen darauf beschränken zu zeigen, dass die Grössen, welche bei der Summendarstellung auftreten, ohne Auflösung von Gleichungen unmittelbar zu berechnen sind, wenn die Coefficienten der von uns aufgestellten Gleichung m^{ten} Grades bekannt sind. Diese Gleichung m^{ten} Grades erhält dadurch ein ganz besonderes Gewicht — sie bildet die Grundlage für beide Darstellungsformen der Integrale.

Es möge sogleich hier bemerkt werden, dass auch in der Folge der Schwerpunkt auf die Aufstellung der Gleichung gelegt werden wird, welcher die Grössen $sn\alpha_r$ Genüge leisten, während die wirkliche Darstellung in der Summenform aus den angegebenen Gründen etwas zurücktreten wird.

Um die Function J_1 in der Summenform darzustellen, führen wir die Grösse ein:

$$\psi(u) = e^{\pi i (m+1) v} \frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)} e^{\lambda u - \frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v}, \tag{28}$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$a = \sum a_r + (m+1)\frac{\tau}{2},$$

$$2\lambda K = \frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} - \sum \frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}.$$

Wir können dann J_1 in der Form darstellen:

$$J_1 = \sum_0^{m-1} {}^r B_{m-r} \frac{d^r \psi(u)}{du^r}, \tag{29}$$

wobei die Grössen B_{m-r} Constanten bedeuten. Das ganze Problem kommt dann darauf hinaus, die Grössen B_{m-r}, a, λ zu bestimmen. Dazu werden die Resultate gebraucht, die in § 83 und § 84 des ersten Bandes ausführlich behandelt worden sind. Es zeigte sich hier die Entwickelung um den Punkt:

$$u = iK'$$

herum in der Form:

$$J_1 = C\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m (1 + K_2 . \varepsilon^2 + K_3 . \varepsilon^3 + \cdots),$$

wobei die Grössen K sich in gewisser näher angegebener Weise ganz und rational aus den Ausdrücken zusammensetzen:

$$\sum x_r^l \quad \text{und} \quad \sum u_r . x_r^l.$$

Die ersten drücken sich ganz und rational durch die Coefficienten der Gleichung m^{ten} Grades aus, welcher die Grössen x_r Genüge leisten, die zweiten sind L multiplicirt mit einer ebensolchen Function. Dabei zeigt es sich — wenn wir hinzunehmen, dass L^2 sich rational durch die Coefficienten der mehrfach genannten Gleichung darstellen lässt, dass die Grössen K in zwei Kategorien zerfallen — die einen sind ganze rationale Functionen der Coefficienten p, die andern gleich dem Producte von L mit solchen Functionen.

Jedenfalls sind also alle Grössen K und mithin auch alle Grössen B ohne Auflösung der Gleichung m^{ten} Grades völlig bekannt. L ist doppeldeutig, von seinem Zeichen hängt es ab, welches der beiden Integrale J_1 oder J_2 wir darstellen.

Es bleibt übrig, a und λ zu bestimmen.

Nehmen wir an, dass m ungerade ist, so folgt von Vielfachen von τ abgesehen:

$$a = a_1 + a_2 + \cdots a_m,$$

oder also die Bestimmung von a kann auf die Bestimmung von:

$$sn\alpha = sn(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_m)$$

zurückgeführt werden. Hiermit sind wir zu einem mehrfach behandelten Problem gelangt, über dessen Literatur im ersten Bande näher berichtet worden ist, insbesondere sind in der Literaturangabe die Resultate besonders berücksichtigt worden, die sich in einer Arbeit von Story finden.

Nehmen wir zweitens an, dass m gerade ist, so ist von Vielfachen von τ abgesehen:

$$a = a_1 + a_2 + \cdots a_m + \frac{\tau}{2},$$

oder also es kommt das Problem hinaus auf die Bestimmung von:

$$\frac{1}{sn(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_m)},$$

sodass wir wieder zu einer bekannten Aufgabe gelangt sind.

Wir nehmen nun an, dass m ungerade und zwar gleich $2\mu - 1$ sei, dann folgt:

$$sn(\alpha_1 + \cdots \alpha_{2\mu-1}) = \frac{M_1}{M}, \tag{30}$$

$$M = s_r^{2\mu-2}, \quad s_r^{2\mu-4}, \ldots 1, \quad s_r^{2\mu-4}.u_r, \ldots u_r$$

$$s_1 . s_2 \ldots s_m . M_1 = s_r^{2\mu} \quad , \quad s_r^{2\mu-2}, \ldots s_r^2, \quad s_r^{2\mu-4}.u_r, \ldots u_r \,| \quad r = 1, 2, \ldots m.$$

In diesen Determinanten ist der kürzeren Bezeichnung wegen:

$$s_r = sn(\alpha_r)$$

gesetzt worden.

Ersetzen wir die Grössen s durch die Grössen x, so folgt:

$$M = | x_r^{\mu-1}, \quad x_r^{\mu-2}, \ldots 1, \quad x_r^{\mu-2}.u_r, \ldots u_r |$$

$$s_1 s_2 \ldots s_m . M_1 = | x_r^{\mu} \quad , \quad x_r^{\mu-1}, \ldots x_r, \quad x_r^{\mu-2}.u_r, \ldots u_r |$$

Ersetzen wir ferner die Grössen u_r durch die Grösse L und die Grössen $f'(x_r)$, so ergiebt sich:

$$\prod f'(x_r) M = L^{\mu-1} | f'(x_r) x_r^{\mu-1}, \ldots f'(x_r), \quad x_r^{\mu-2}, \ldots 1 |.$$

Nun ist allgemein:

$$f'(x) x^l = a_{l,0} . x^{2\mu-2} + a_{l,1} . x^{2\mu-3} + \cdots a_{l,2\mu-2},$$

wobei die Grössen a sich in bekannter Weise durch die Grössen p darstellen lassen.

Unter solchen Umständen lässt sich der Ausdruck:

$$\prod f'(x_r)\, M$$

als ein Product darstellen und zwar als Product der Determinante:

$$| x_r^{2\mu-2}, \quad x_r^{2\mu-3}, \dots 1 |$$

und der Grösse $L^{\mu-1}. A$, wobei A gesetzt ist gleich:

$$A = \begin{vmatrix} a_{\mu-1,0} & a_{\mu-1,1} & \dots & a_{\mu-1,2\mu-3} & a_{\mu-1,2\mu-2} \\ a_{\mu-2,0} & a_{\mu-2,1} & \dots & a_{\mu-2,2\mu-3} & a_{\mu-2,2\mu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,2\mu-3} & a_{0,2\mu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

oder auch:

$$A = \begin{vmatrix} a_{\mu-1,0} & a_{\mu-1,1} & \dots & a_{\mu-1,\mu-1} \\ a_{\mu-2,0} & a_{\mu-2,1} & \dots & a_{\mu-2,\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,\mu-1} \end{vmatrix}$$

Ganz analog kann geschrieben werden:

$$s_1 s_2 \dots s_m . M_1 = | x_r^{\mu}, x_r^{\mu-1}, \dots x_r, x_r^{\mu-2}. u_r, \dots u_r | \quad r = 1, 2, \dots m.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{cases} s_1 s_2 \dots s_m . \prod f'(x_r)\, M_1 \\ = L^{\mu-1} | f'(x_r)\, x_r^{\mu}, \quad f'(x_r)\, x_r^{\mu-1}, \dots f'(x_r)\, x_r, \quad x_r^{\mu-2}, \dots 1 |. \end{cases}$$

Die Determinante auf der rechten Seite kann als Product der Determinante:

$$| x_r^{2\mu-2}, \quad x_r^{2\mu-3} \dots 1 |$$

und der Determinante:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{\mu,0} & a_{\mu,1} & \dots & a_{\mu,\mu-1} \\ a_{\mu-1,0} & a_{\mu-1,1} & \dots & a_{\mu-1,\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,\mu-1} \end{vmatrix}$$

dargestellt werden. Unter solchen Umständen erhalten wir das Resultat:

$$31) \qquad sn(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{2\mu-1}) = \frac{A_1}{A . s_1 . s_2 \dots s_m}.$$

Dabei ist:

$$(s_1 s_2 \dots s_m)^2 = -p_m,$$

sodass $sn^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{2\mu-1})$ sich rational durch die Coefficienten der von uns aufgestellten Gleichung darstellen lässt.

Genau so ist der Fall eines geraden m zu erledigen und zwar setzen wir:

$$m = 2\mu,$$

dann folgt:

$$32)\qquad \frac{1}{sn(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{2\mu})} = \frac{N}{N_1},$$

wobei gesetzt ist:

$$s_1 . s_2 \ldots s_m . N = | s_r^{2\mu}, \quad s_r^{2\mu-2}, \ldots s_r^2, \quad s_r^{2\mu-2} . u_r, \ldots u_r |$$

$$N_1 = | s_r^{2\mu}, \quad s_r^{2\mu-2}, \ldots 1, \quad s_r^{2\mu-4} . u_r, \ldots u_r \quad r = 1, 2, \ldots 2\mu.$$

Ersetzen wir die Grössen s_r durch die Grössen x_r, so folgt:

$$s_1 . s_2 \ldots s_m . N = | x_r^\mu, \quad x_r^{\mu-1}, \ldots x_r, \quad x_r^{\mu-1} . u_r, \ldots u_r |,$$

oder also wir erhalten:

$$s_1 s_2 \ldots s_m . \prod f'(x_r) N = L^\mu | f'(x_r) x_r^\mu, \ldots f'(x_r) x_r, \quad x_r^{\mu-1}, \ldots 1 |.$$

Wir wollen nun ähnlich wie vorhin setzen:

$$f'(x) x^l = b_{l,0} . x^{2\mu-1} + b_{l,1} . x^{2\mu-2} + \cdots b_{l,2\mu-1},$$

so stellt die Determinante auf der rechten Seite sich wieder als ein Product dar und zwar der Determinante:

$$| x_r^{2\mu-1}, \quad x_r^{2\mu-2} \ldots 1 |$$

und der Determinante:

$$B = \begin{vmatrix} b_{\mu,0} & b_{\mu,1} & \ldots b_{\mu,\mu-1} \\ b_{\mu-1,0} & b_{\mu-1,1} & \ldots b_{\mu-1,\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \ldots b_{1,\mu-1} \end{vmatrix}$$

In analoger Weise ist N_1 zu behandeln. Setzen wir:

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_{\mu,0} & b_{\mu,1} & \ldots b_{\mu,\mu} \\ b_{\mu-1,0} & b_{\mu-1,1} & \ldots b_{\mu-1,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{0,0} & b_{0,1} & \ldots b_{0,\mu} \end{vmatrix}$$

so folgt:

$$33)\qquad \frac{1}{sn(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{2\mu})} = \frac{L . B}{B_1 . s_1 . s_2 \ldots s_m},$$

sodass auch jetzt das Problem gelöst ist.

Es bleibt übrig, die Grösse λ zu bestimmen. Dies Problem kommt darauf hinaus, die Differenz zu untersuchen:

$$\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} - \sum \frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}.$$

Hiermit sind wir wiederum zu einer mehrfach behandelten Aufgabe gekommen. In Bezug auf die Literatur werde auf den ersten Band verwiesen, insbesondere auf die daselbst citirte Arbeit von

Frobenius und Stickelberger im 88. Bande des Crelle'schen Journals. Jedenfalls lässt sich die Differenz in symmetrischer Weise durch die Grössen $sn^2 a_r$ und u_r darstellen. Die Grundlage der Darstellung kann hierbei die Formel abgeben, welche in § 82 des ersten Bandes abgeleitet ist und lautet:

$$34)\qquad \zeta(u+u_1) = \zeta(u) + \zeta(u_1) + snu\,.\,snu_1\,sn(u+u_1).$$

§ 40.[8])

Untersuchung von Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten die beiden singulären Punkte $u = iK'$ und $u = K$ besitzen.

Mit den vorangehenden Untersuchungen ist der Fall vollkommen erledigt, dass die Coefficienten einer Picard'schen Differentialgleichung 2ter Ordnung einen singulären Punkt besitzen. Wir wenden uns nunmehr zu dem Falle, dass in den Coefficienten deren zwei auftreten. Einen derselben können wir willkürlich wählen, wir setzen ihn gleich:

$$u = iK'.$$

Ehe wir nun zu dem allgemeinen Falle übergehen, dass der zweite singuläre Punkt ein beliebiger ist, wollen wir annehmen, dass er den Werth besitze:

$$u = K.$$

Auch dieser Fall soll nicht in seiner Allgemeinheit durchgeführt, sondern in der Folge etwas specialisirt werden.

Die in Frage stehenden Differentialgleichungen haben jedenfalls die Form:

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2y}{du^2} + \left(b_0 + b_1\frac{k^2 snu\,.\,cnu}{dnu}\right)\frac{dy}{du} \\ &= y\left(c_0 + c_1\frac{snu\,cnu}{dnu} + c_2\,.\,sn^2u + c_3\frac{cn^2u}{dn^2u}\right). \end{aligned}\right.$$

Jedenfalls muss c_3 gleich Null sein, da die Integrale den Punkt $u = K$ nicht als Unendlichkeitspunkt besitzen sollen, überdies angenommen werden kann, dass er auch kein Nullpunkt derselben ist.

Ferner können wir durch Substitution von $ye^{\lambda u}$ an Stelle von y immer dahin kommen, dass b_0 gleich Null ist.

Wir wollen weiter annehmen, dass auch c_1 der Null gleich sei. Die Integrale werden dann die Form haben müssen:

$$2)\qquad y = \prod \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}v}$$

und zwar werden die Integrale durch Vertauschung von v mit $-v$ in einander übergehen. Die Grössen a_r sind von einander verschieden,

wir nehmen hinzu, dass sie auch vom Zeichen abgesehen von einander verschieden sein sollen.

Wir gehen nun ganz ähnlich vor, wie bei der Lamé'schen Differentialgleichung. Die rechte Seite verschwindet für die Werthe:

$$v = -a_r,$$

die linke muss es also auch. Setzen wir:

$$y = dn^2 \alpha_r,$$

so ergeben sich demgemäss die Gleichungen:

$$3) \qquad \frac{b_1 \cdot u_r}{2 y_r} = \sum\nolimits_l' \frac{u_r + u_l}{y_r - y_l},$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass über $l = 1, 2, \ldots m$ mit Ausnahme von $l = r$ zu summiren ist.

Setzen wir $b_1 = 0$, so erhalten wir die Lamé'sche Gleichung. Diesen Fall schliessen wir aus. Wir wollen nun die Gleichungen der Reihe nach mit $y_1{}^\varrho, y_2{}^\varrho, \ldots y_m{}^\varrho$ multipliciren und addiren. Das Resultat nimmt die Form an:

$$\frac{b_1}{2} \sum u_r \cdot y_r^{\varrho - 1} = (m - \varrho) \sum u_r \cdot y_r^{\varrho - 1} + s_1 \sum u_r \cdot y_r^{\varrho - 2} + \cdots s_{\varrho - 1} \sum u_r,$$

wobei die Grössen s die entsprechenden Potenzsummen der Grössen y bedeuten. Die Gleichung gilt für $\varrho = 1, 2, \ldots$ Aus ihr folgt, dass $\frac{b_1}{2}$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots m - 1$ bedeuten muss. In der That, wäre dasselbe nicht der Fall, so müsste die Gleichung:

$$\sum u_r \cdot y_r^\varrho = 0$$

für $\varrho = 0, 1, \ldots m - 2$ bestehen. Das führt aber zu einem Widerspruch — es würde $b_1 = 0$ folgen. Wir haben uns also auf die soeben definirten Werthe von b_1 zu beschränken. Setzen wir:

$$b_1 = 2(\mu + 1),$$

so nimmt die Differentialgleichung die Form an:

$$4) \quad \frac{d^2 y}{du^2} + 2(\mu + 1) k^2 \frac{snu \cdot cnu}{dnu} \frac{dy}{du} = y[c_0 + m(m - 2\mu - 1) k^2 sn^2 u].$$

Es hat keine Schwierigkeit, diese Gleichung weiter zu behandeln. Es möge in Bezug hierauf auf die citirte Arbeit von Sparre und auf zwei Noten von Gylden verwiesen werden.

Wir wollen noch weiter specialisiren. Im Falle m eine ungerade Zahl ist, können wir μ so bestimmen, dass der Coefficient c_1 gleich Null wird, wir brauchen nur zu setzen:

$$m = 2\mu + 1.$$

Es wird dann:

$$5)\qquad \frac{b_1}{2} = \frac{m+1}{2} = \mu + 1,$$

und dieser Werth von b_1 soll allein zunächst ins Auge gefasst werden. Wir sind auf diesem Wege zu einer Differentialgleichung gelangt, auf die zuerst von Picard aufmerksam gemacht worden ist.

Für den Werth $b_1 = 2(\mu + 1)$ kann das vorhin aufgestellte Gleichungssystem geschrieben werden:

$$6)\qquad \begin{cases} \sum u_r . y_r^\varrho = 0, \quad \varrho = 0, 1, \ldots \mu - 2, \\ \sum u_r(-y_r^\mu + s_1 . y_r^{\mu-1}) = 0, \\ \sum u_r(-2y_r^{\mu+1} + s_1 . y_r^\mu + s_2 . y_r^{\mu-1}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum u_r[-(\mu+1)y_r^{2\mu} + s_1 . y_r^{2\mu-1} + \cdots s_{\mu+1} . y_r^{\mu-1}] = 0. \end{cases}$$

Es kann dieses Gleichungssystem leicht direct aufgelöst werden, wir ziehen aber vor, es in eine noch übersichtlichere Form zu bringen, indem wir die Gleichung einführen, welcher die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_m$ Genüge leisten. Dieselbe möge lauten:

$$7)\qquad F(y) = y^m + P_1 . y^{m-1} + \cdots P_m = 0,$$

dann können wir das Gleichungssystem schreiben:

$$8)\qquad \begin{cases} \sum u_r . y_r^\varrho = 0, \quad \varrho = 0, 1, \ldots \mu - 2, \\ \sum u\,(y_r^\mu + P_1 . y_r^{\mu-1}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum u_r(y_r^{2\mu} + P_1 . y_r^{2\mu-1} + \cdots P_{\mu+1} . y_r^{\mu-1}) = 0. \end{cases}$$

Setzen wir hierin:

$$9)\qquad u_r = v_r . y_r^{\mu+1},$$

so leistet v_r den Gleichungen Genüge:

$$10)\qquad \begin{cases} \sum v_r . y_r^{\varrho+\mu+1} = 0, \quad \varrho = 0, 1, \ldots \mu - 2, \\ \sum v_r(y_r^m + P_1 . y_r^{m-1}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum v_r(y_r^{m+\mu} + P_1 . y_r^{m+\mu-1} + \cdots P_{\mu+1} . y_r^{m-1}) = 0. \end{cases}$$

Das ist wieder ein bekanntes Gleichungssystem der Algebra. Aus ihm folgt:

$$11)\qquad v_1 . F'(y_1) = v_2 . F'(y_2) = \cdots v_m . F'(y_m),$$

oder also wir erhalten ähnlich wie im Falle der Lamé'schen Gleichung die Beziehungen:

$$12)\qquad \frac{F'(y_1)\,u_1}{y_1^{\mu+1}} = \frac{F'(y_2)\,u_2}{y_2^{\mu+1}} \cdots = \frac{F'(y_m)\,u_m}{y_m^{\mu+1}}.$$

Wir wollen nun nach dem Vorgange von Sparre hieraus für y_r^2 eine algebraische Gleichung vom Grade m ableiten. Durch Quadrirung folgt:

$$13)\qquad F'(y_r)^2 \frac{-k'^2 + (1+k'^2)\,y_r - y_r^2}{y_r^m} = L_1^2, \quad r = 1, 2, \ldots m.$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung:

$$14)\qquad F'(y)^2 \frac{-k'^2 + (1+k'^2)\,y - y^2}{y^m} - L_1^2 = 0$$

die Wurzeln $y_1, y_2, \ldots y_m$ besitzt, sodass der Zähler der linken Seite durch $F(y)$ theilbar sein muss. Es folgt also die Gleichung:

$$F'(y)^2 \frac{-k'^2 + (1+k'^2)\,y - y^2}{y^m} - L_1^2 = F(y)\,\Phi(y),$$

wobei $\Phi(y)\;y^m$ eine ganze Function von y vom Grade m sein muss. Durch Differenziren ergiebt sich:

$$\Phi_1(y)\,F'(y) = F'(y)\,\Phi(y) + \Phi'(y)\,F(y),$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{cases} \Phi_1(y) = 2F''(y)\dfrac{-k'^2 + (1+k'^2)y - y^2}{y^m} \\ \qquad + F'(y)\dfrac{[(2\mu+1)k'^2 - 2\mu(1+k'^2)\,y + (2\mu-1)y^2]}{y^{m+1}}. \end{cases}$$

Nun hat nach Annahme $F(y)$ mit $F'(y)$ keinen Theiler gemeinsam, daraus folgt sofort die Richtigkeit der Gleichung:

$$15)\qquad y^{m+1} . \Phi'(y) = (Ay + B)\,F'(y).$$

Nun ist:

$$16)\qquad \begin{cases} F(y) = \sum\limits_0^m P_r . y^{m-r}, \\ \dfrac{F(y)}{y^{m+1}} = \sum P_r . y^{-1-r}, \\ \dfrac{F'(y)}{y^{m+1}} = \sum (m-r)\,P_r . y^{-2-r}, \\ \dfrac{F''(y)}{y^m} = \sum (m-r)(m-r-1)\,P_r . y^{-2-r}. \end{cases}$$

Wir können ferner schreiben:

17) $$\Phi_1(y) = \sum_{-1}^{m} Q_r \cdot y^{-1-r},$$

wobei gesetzt ist:

18) $$\begin{cases} Q_r = - P_{r+1}(m-r-1)(m-2r-2) \\ \quad + 2(1+k'^2)(m-r)(\mu-r)P_r - k'^2(m-r+1)(m-2r)P_{r-1}. \end{cases}$$

Setzen wir für $y^{m+1}.\Phi'(y)$ den Werth:

$$(Ay+B)F'(y)$$

in Gleichung 15) ein, dividiren durch $F'(y)$ und differenziren nochmals, so erhalten wir:

$$y^{m+1}.\Phi'_1(y) = (Ay+B)F'(y) + A.F(y) + (Ay+B)\frac{d}{dy}\left(\frac{F(y)}{y^{m+1}}\right).$$

Dividiren wir durch y^{m+1}, so können wir die rechte Seite auch schreiben:

$$\sum_{-1}^{m}[P_{r+1}A(m-2r-2) + P_r B(m-2r-1)]\, y^{-2-r},$$

oder also wir erhalten durch Vergleichung die Recursionsformel:

19) $$-(1+r)Q_r = P_{r+1}.A(m-2r-2) + P_r.B(m-2r-1).$$

Setzen wir $r=-1$ und $r=0$, indem wir hinzunehmen, dass:

$$P_{-2} = P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1$$

ist, so ergiebt sich:

20) $$A = 0,$$

21) $$B = (m-2)P_1 - m(1+k'^2).$$

Setzen wir diese Werthe ein, so erhalten wir für die Grössen P die folgende Recursionsformel:

22) $$\begin{aligned} &C_{r+1}.P_{r+1} - C_r.P_r + k'^2.C_{r-1}.P_{r-1} = 0, \\ &C_{r+1} = (m-2r+2)(m-r-1)(r+1), \\ &C_r \;\; = (m-2r-1)[(m-2)P_1 + r(m-r-1)(1+k'^2)], \\ &C_{r-1} = (m-r+1)(m-2r)(1+r). \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$2(m-4)P_2 = (m-3)P_1^2 + (m-3)(1+k'^2)P_1 - 2k'^2.m,$$

$$2.3.(m-4)(m-6)P_3 = D_1.P_1^3 + D_2.P_1^2 + D_3.P_1 + D_4,$$

$$D_1 = (m-2)(m-5), \quad D_2 = (m-5)[3m-8+2(m-3)k'^2],$$

$$D_3 = 2[(m-3)(m-5) - (3m^2-14m+1)k'^2], \quad D_4 = -2k'^2.m(m-5).$$

So können der Reihe nach die Grössen $P_2, P_3, \ldots P_{m-1}$ berechnet werden. Als vorletzte Gleichung ergiebt sich:

23) $$(m-1)P_1.P_{m-1} - 2k'^2.m.P_{m-2} = 0.$$

Dieselbe ist eine Folge der vorangegangenen. Die letzte Gleichung wird:

24) $$[(m-2)P_1 - m(1+k'^2)]P_m - k'^2 . m . P_{m-1} = 0.$$

Dieselbe liefert die Bestimmung von P_m. Damit sind die sämmtlichen Coefficienten P bestimmt, sobald P_1 gegeben ist. P_1 kann vermöge der Beziehung:

25a) $$c_0 = (m-2)\sum k^2 . sn^2\alpha_r + k^2 m - m^2,$$

oder auch:

25b) $$c_0 = (m-2)P_1 - 2m + k^2 m$$

unmittelbar gefunden worden.

Damit sind dann auch die Grössen α_r bis auf das Vorzeichen bestimmt. Eins derselben bleibt willkürlich, die Zeichen der andern sind aus den Gleichungen bestimmt:

$$\frac{u_1 . F'(y_1)}{y_1^{\mu+1}} = \frac{u_2 . F'(y_2)}{y_2^{\mu+1}} = \cdots = L_1.$$

Hiermit wollen wir die Betrachtung schliessen, da die Integrale beide gefunden sind. Hierbei braucht kaum bemerkt zu werden, dass die Grösse L_1 ähnlich wie bei der Lamé'schen Gleichung bestimmt werden kann, dass überdies die Integrale in Summenform ohne Auflösung der Gleichung m^{ten} Grades dargestellt werden können.

Wir erhalten den

Lehrsatz: Die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{du^2} + 2(\mu+1)k^2\frac{snu\,cnu}{dnu}\frac{dy}{du} = y . c_0$$

besitzt als vollständiges Integral die Grösse:

$$J = c_1 J_1 + c_2 J_2,$$

wobei gesetzt ist:

$$J_1 = \prod \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}r},$$

$$J_2 = \prod \frac{\vartheta_1(v-a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}r}.$$

Die Grössen $sn^2\alpha_r$ sind als Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades $(m = 2\mu + 1)$ darstellbar, deren Coefficienten eindeutig durch die Grösse c_0 ausgedrückt werden können, die Grössen α_r selbst sind bis auf das Vorzeichen einer einzigen eindeutig bestimmt.

Picard hat die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{du^2} + b_1 k^2 \frac{snu\,cnu}{dnu}\frac{dy}{du} = y\,c_0$$

auch in dem Falle integrirt, dass b_1 eine ungerade Zahl ist, und zwar muss dann gesetzt werden:

$$26)\qquad b_1 = 2\mu + 1 = m + 1 \quad \text{also} \quad m = 2\mu.$$

Zu diesem Falle wenden wir uns jetzt. Die Grössen α_r müssen auch in diesem Falle von einander verschieden sein, die Grössen y_r können es aber nach unseren früheren Bemerkungen nicht, also muss jedenfalls einmal eine Beziehung von der Form bestehen:

$$\alpha_r = -\alpha_l.$$

Es tritt dann an Stelle des Gliedes:

$$\frac{u_r + u_l}{y_r - y_l} = \frac{1}{k^2}\frac{sn\alpha_r . cn\alpha_r . dn\alpha_r + sn\alpha_l . cn\alpha_l . dn\alpha_l}{sn^2\alpha_l - sn^2\alpha_r}$$

das Glied:

$$-\frac{1}{k^2}\frac{1 - 2(1+k^2)sn^2\alpha_r + 3k^2 sn^4\alpha_r}{2sn\alpha_r . cn\alpha_r . dn\alpha_r}.$$

Wir erhalten also in diesem Falle ein ganz anderes Gleichungssystem. Im Allgemeinen wird die Zahl der Gleichungen grösser sein, als die Zahl der Unbekannten. Diese Schwierigkeit fällt jedenfalls fort, wenn wir setzen:

$$\alpha_1 = -\alpha_n, \quad \alpha_2 = \alpha_{n-1}, \ldots \quad \alpha_\mu = -\alpha_{\mu+1}.$$

In diesem Falle reducirt sich unser Gleichungssystem auf ein System von μ Gleichungen mit den μ Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$, nämlich auf das System:

$$27)\qquad \frac{b_1}{2}\frac{u_r^2}{y_r} = -\frac{1 - 2(1+k^2)sn^2\alpha_r + 3k^2 sn^4\alpha_r}{2k^2} + 2\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{y_r - y_l}.$$

Der Strich an der Summe bedeutet, dass dieselbe zu erstrecken ist nach l über $1, 2, \ldots \mu$ mit Ausnahme von $l = r$. An Stelle von r ist der Reihe nach zu setzen $1, 2, \ldots \mu$. Dieses Gleichungssystem kann in der folgenden Weise gelöst werden. Wir setzen wie früher:

$$x_r = sn^2\alpha_r,$$

und nehmen an, dass die Grössen x_r der Gleichung Genüge leisten:

$$28)\qquad f(x) = x^\mu + p_1 . x^{\mu-1} + \cdots p_\mu = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen kann unser Gleichungssystem geschrieben werden:

$$29)\qquad \begin{cases} [1 - x_r(2 + 2k^2 - k^2.b_1) + x_r^2.k^2(3 - b_1)]f''(x_r) \\ \qquad\qquad + 4x_r[1 - x_r(1+k^2) + k^2.x_r^2]f_r'(x_r) = 0. \end{cases}$$

Für allgemeine Werthe von b_1 ist die Gleichung in x_r vom Grade $\mu + 1$, für den speciellen Werth von b_1 dagegen, den wir ins Auge zu fassen haben und der jetzt aufgenommen werden möge, wird der Factor von $x_r^{\mu+1}$ gleich Null, sodass die Gleichung den Grad μ besitzt. Dieselbe hat genau dieselben Wurzeln wie die Gleichung:

$$f(x) = 0,$$

muss also mit ihr übereinstimmen. Da nun:

$$f'(x_r) = \mu . x_r^{\mu-1} + (\mu - 1)p_1 . x_r^{\mu-2} + \cdots p_{\mu-1}$$

$$2f_r''(x_r) = \mu(\mu - 1)x_r^{\mu-2} + (\mu - 1)(\mu - 2)p_1 . x_r^{\mu-3} + \cdots 2p_{\mu-2}$$

ist, so ergiebt die Vergleichung die Relationen 30):

$$\begin{aligned}
(e_1 + e_2 . p_1)p_l &= d_{l-1}^{(l)} . p_{l-1} + d_l^{(l)} . p_l + d_{l+1}^{(l)} . p_{l+1} \\
d_{l-1}^{(l)} &= (\mu - l + 1)(2\mu - 2l + 1), \\
d_l^{(l)} &= (\mu - l)[2l - 2\mu + k^2(2l + 1)], \\
d_{l+1}^{(l)} &= -2k^2(l + 1)(\mu - l - 1), \\
e_1 &= \mu(-2\mu + k^2), \\
e_2 &= -2k^2(\mu - 1).
\end{aligned}$$

In diesen Relationen ist an Stelle von l der Reihe nach zu setzen: $1, 2, \ldots \mu$. Die $\mu - 2$ ersten Relationen drücken dann die Grössen $p_2, \ldots p_{\mu-1}$ als rationale ganze Functionen von p_1 aus und zwar von den resp. Graden $2, 3, \ldots \mu - 1$. Setzen wir diese Werthe in die vorletzte Gleichung:

$$31) \qquad p_{\mu-1} = \frac{d_{\mu-2}^{(\mu-1)} . p_{\mu-2} + d_{\mu-1}^{(\mu-1)} . p_{\mu-1}}{\mu(-2\mu + k^2) - 2k^2 . p_1(\mu - 1)}$$

ein, so erhalten wir für die Grösse p_1 eine Gleichung vom Grade μ, die in jedem einzelnen Falle sofort aufgestellt werden kann. Die letzte Gleichung ergiebt p_μ.

Dabei drückt p_1 sich unmittelbar durch c_0 aus. In der That, es ist:

$$32) \qquad c_0 = (m - 2)\sum k^2 . sn^2 a_r + mk^2 - m^2.$$

Unter solchen Umständen leistet c_0 einer Gleichung m^{ten} Grades Genüge, die aus der aufgestellten mit leichter Mühe abgeleitet werden kann. Wir erhalten demnach den

Lehrsatz: Leistet die Constante c_0 der vorhin definirten Gleichung vom Grade μ Genüge, so besitzt die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{du^2} + (2\mu + 1)k^2 \frac{snu\, cnu}{dnu} \frac{dy}{du} = c_0 y$$

ein Integral von der Form:

$$y = \prod_{r=1}^{r=\mu} \frac{\vartheta_1(v + a_r)\vartheta_1(v - a_r)}{\vartheta_0^2(v)}.$$

Die Grössen $sn^2\alpha_r$ leisten einer Gleichung vom Grade μ Genüge, deren Coefficienten sich ganz und rational durch c_0 darstellen lassen.

In diesem Falle ist die Summendarstellung des Integrals unmittelbar gegeben. In der That, an Stelle der Grösse y können wir auch die Grösse nehmen:

$$\prod \frac{\vartheta_0^2 . \vartheta_1(v+a_r)\,\vartheta_1(v-a_r)}{\vartheta_0^2(v)\,\vartheta_0^2(a)},$$

oder auch:

$$\prod (sn^2 u - sn^2\alpha_r).$$

Verwandeln wir dieses Product in eine Summe, die eine ganze Function von $sn^2 u$ ist, so sind die Coefficienten unmittelbar bekannt und zwar drücken dieselben sich, wie gezeigt, ganz und rational durch c_0 aus.

Wir wollen nun versuchen, das zweite Integral unserer Differentialgleichung zu bestimmen.

Dazu machen wir die Annahme, welche auf die vorige unmittelbar folgt. Wir setzen fest:

$$\alpha_1 = -\alpha_m, \quad \alpha_2 = -\alpha_{m-1}, \ldots \quad \alpha_{\mu-1} = -\alpha_{\mu+2},$$

während α_μ verschieden sein soll von $\alpha_{\mu+1}$. Eine Betrachtung einfachster Art zeigt dann, dass sicherlich die Relationen bestehen müssen:

$$u_\mu = u_{\mu+1} = 0,$$

sie zeigt ferner, dass

$$sn^2\alpha_\mu = 0, \quad sn^2\alpha_{\mu+1} = 1$$

oder umgekehrt sein muss.

Die Gleichungen, denen die Grössen $sn^2\alpha_r$ Genüge zu leisten haben, nehmen die Form an:

$$33)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{b_1}{2}\frac{u_r^2}{y_r} = &-\frac{1-2(1+k^2)sn^2\alpha_r + 3k^2.sn^4\alpha_r}{2k^2} + 2u_r^2 \sum{}' \frac{1}{y_r - y_l} \\ &- \frac{u_r^2}{k^2 sn^2\alpha_r} + \frac{u_r^2}{k^2 cn^2\alpha_r}. \end{aligned}\right.$$

An Stelle von r ist der Reihe nach zu setzen $1, 2, \ldots \mu - 1$. Die Summe nach l ist zu nehmen über alle l von 1 bis $\mu - 1$ mit Ausnahme von $l = r$.

Das Gleichungssystem kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$34)\quad 3 + x_r[-6 + k^2(2\mu - 3)] - x_r^2 k^2(2\mu - 6) + 4u_r^2 \sum{}' \frac{1}{x_r - x_l} = 0.$$

Führen wir die Gleichung ein, welcher die Grössen x_r Genüge leisten:

$$35)\qquad \varphi(x) = x^{\mu-1} + q_1 . x^{\mu-2} + \cdots q_{\mu-1} = 0,$$

und stellen ganz analoge Betrachtungen an, wie im vorigen Falle, so erhalten wir die Beziehungen:

36) $$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cdot q_1) q_l = \delta_{l-1}^{(l)} \cdot q_{l-1} + \delta_l^{(l)} \cdot q_l + \delta_{l+1}^{(l)} \cdot q_{l+1},$$

wobei gesetzt ist:

$$\delta_{l-1}^{(l)} = (\mu - l)(2\mu - 2l + 1),$$
$$\delta_l^{(l)} = (\mu - l - 1)[k^2(2l + 1) - 2(\mu - l + 1)],$$
$$\delta_{l+1}^{(l)} = -2k^2(l+1)(\mu - l - 1),$$
$$\varepsilon_1 = (\mu - 1)(k^2 - 2\mu - 2),$$
$$\varepsilon_2 = -2k^2(\mu - 1).$$

Die Zahl der Relationen ist gleich $\mu - 1$. Aus den $\mu - 2$ ersten sind die Grössen $q_2, \dots q_{\mu-1}$ als ganze Functionen von q_1 und zwar von den resp. Graden $2, 3, \dots \mu - 1$ bestimmt. Setzen wir diese Ausdrücke in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir eine Gleichung vom Grade μ, welcher die Grösse q_1 Genüge leisten muss. Erwägen wir die Beziehung, welche zwischen q_1 und c_0 besteht, so ergiebt sich für c_0 wiederum eine Gleichung vom Grade μ. Nehmen wir einstweilen an, dass das dieselbe Gleichung wie vorhin ist, so ergiebt sich der

Lehrsatz: Die im vorigen Lehrsatz erwähnte Differentialgleichung:
$$\frac{d^2y}{du^2} + (2\mu + 1)k^2 \frac{snu\,cnu}{dnu} \frac{dy}{du} = c_0 \cdot y$$
besitzt als zweites Integral einen Ausdruck von der Form:
$$y = snu \,.\, cnu \prod_1^{\mu-1} \frac{\vartheta_1(v - a_r)\vartheta_1(v + a_r)}{\vartheta_0^2(v)}.$$
Die Grössen $sn^2\alpha_r$ leisten einer Gleichung vom Grade $\mu - 1$ Genüge, deren Coefficienten sich ganz und rational durch c_0 darstellen lassen.

Auch hier ist die Summendarstellung unmittelbar gegeben. Um die Theorie zu Ende zu führen, ist es nur noch nöthig zu zeigen, dass die Constante c_0 im letzten Falle derselben Bedingungsgleichung Genüge leistet, wie im ersten. Es wäre das nachgewiesen, wenn wir zeigen könnten, dass das zweite Integral der Picard'schen Gleichung die Form besitzt:
$$snu\,cnu(sn^{2(\mu-1)}u + c_1 \,.\, sn^{2(\mu-2)}u + \cdots c_{\mu-1}).$$
Das kann aber auf folgendem Wege geschehen. Setzen wir:

37) $$y_1 = \prod (sn^2 u - sn^2 \alpha_r),$$

so folgt ein zweites Integral der Differentialgleichung in der Form:

38a) $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-(m+1)k^2 \int \frac{snu.cnu}{dnu} du}}{y_1^2} du,$$

oder also:

38b) $$y_2 = y_1 \int \frac{dn^{m+1}u \,.\, du}{\prod (sn^2 u - sn^2 \alpha_r)^2},$$

wobei m eine gerade Zahl ist. Nun kann nach den Untersuchungen des ersten Theiles gesetzt werden:

39) $$\begin{cases} \dfrac{dn^{m+1}u}{\prod (sn^2 u - sn^2\alpha_r)^2} = \sum A_r \dfrac{cn(u-\alpha_r)}{sn(u-\alpha_r)} + \sum A_{-r} \dfrac{cn(u+\alpha_r)}{sn(u+\alpha_r)} \\ \qquad + \sum B_r \dfrac{d}{du} \dfrac{cn(u-\alpha_r)}{sn(u-\alpha_r)} + \sum B_{-r} \dfrac{d}{du} \dfrac{cn(u+\alpha_r)}{sn(u+\alpha_r)}. \end{cases}$$

Es müssen dann die Grössen A_r und A_{-r} verschwinden. Dieselben können leicht gebildet werden. In der That, setzen wir wie vorhin:

40) $$f(x) = \prod (sn^2 u - sn^2 \alpha_r),$$

so folgt:

$$\frac{df(x)}{du} = 2f'(x)\, snu \,.\, cnu \,.\, dnu,$$

$$\frac{d^2 f(x)}{du^2} = 4f''(x) sn^2 u \,.\, cn^2 u \,.\, dn^2 u + 2f'(x)[1 - 2(1+k^2) sn^2 u + 3k^2 \,.\, sn^4 u].$$

In Folge dessen können wir setzen:

$$\frac{1}{\prod (sn^2 u - sn^2 \alpha_r)^2} = \frac{b_{-2}}{(u-\alpha_r)^2} + \frac{b_{-1}}{(u-\alpha_r)} + \cdots,$$

$$b_{-2} = \frac{1}{[2f'(x_r) sn\alpha_r \,.\, cn\alpha_r \,.\, dn\alpha_r]^2},$$

$$b_{-1} = -\frac{2f''(x_r)\, sn^2\alpha_r \,.\, cn^2\alpha_r \,.\, dn^2\alpha_r + f'(x_r)[1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2 \,.\, x_r^2]}{4[f'(x_r) sn\alpha_r \,.\, cn\alpha_r \,.\, dn\alpha_r]^3}.$$

Ferner ist:

$$dn^{m+1}u = dn^{m+1}\alpha_r - (u - \alpha_r)(m+1) k^2 \,.\, sn\alpha_r \,.\, cn\alpha_r \,.\, dn^m \alpha_r + \cdots$$

Entwickeln wir daher den Ausdruck:

$$\frac{dn^{m+1}u}{\prod (sn^2 u - sn^2\alpha_r)^2}$$

nach Potenzen von $u - \alpha_r$ und setzen den Factor von $(u - \alpha_r)^{-1}$ gleich Null, so erhalten wir die Gleichung:

$$-\frac{(m+1)k^2 sn\alpha_r \,.\, cn\alpha_r}{dn\alpha_r} b_{-2} + b_{-1} = 0.$$

Ersetzen wir aber b_{-1} und b_{-2} durch ihre Werthe, so kommen wir zu der alten Gleichung für x_r.

Unter solchen Umständen nimmt y_2 die Form an:

41) $$y_2 = y_1 \left[\sum \left(B_r \frac{cn(u-\alpha_r)}{sn(u-\alpha_r)} + B_{-r} \frac{cn(u+\alpha_r)}{sn(u+\alpha_r)} \right) \right].$$

Ferner folgt, dass $B_r = B_{-r}$ ist und hieraus ergiebt sich unmittelbar die Darstellung:

$$y_2 = snu \,.\, cnu(x^{\mu-1} + c_1 \,.\, x^{\mu-2} + \cdots c_{\mu-1}), \tag{42}$$

also gerade das gesuchte Resultat.

Die zuletzt behandelte Differentialgleichung kann als Repräsentant derjenigen Gleichungen angesehen werden, welche zwei **specielle** singuläre Punkte besitzen.

§ 41.

Untersuchung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei singulären Punkten. Reduction des Problems auf die Betrachtung besonders einfacher Gleichungen.

Wir gehen jetzt zu der Theorie der allgemeinen Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei singulären Punkten über. Den einen derselben können wir willkürlich wählen. Wir setzen ihn gleich iK', der andere möge den Werth $-\beta + iK'$ besitzen. Wir sind dann nach dem früheren berechtigt, anzunehmen, dass er ein scheinbar singulärer Punkt ist. Die sämmtlichen Differentialgleichungen der angegebenen Art haben dann die Form:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{du^2} + [c_1 + c_2 \,.\, k^2 .\, snu \,.\, sn(u+\beta)] \dfrac{dy}{du} \\ \qquad = y[c_3 + c_4 \,.\, k^2 .\, snu \,.\, sn(u+\beta) + c_5 \,.\, k^2 .\, sn^2 u]. \end{cases} \tag{1}$$

Es ist zu untersuchen, wann ihre Integrale die Form haben:

$$\Phi(v) = e^{\lambda u} \prod_{r=1}^{r=m} \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v}. \tag{2}$$

Es sind die Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Werthe von λ, die zu den beiden Integralen gehören, von einander verschieden oder einander gleich sind.

Der erste Fall ist leicht weiterzuführen. In der That, sind die beiden Grössen λ von einander verschieden, so können wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, $c_1 = 0$ setzen.

Wir wollen uns nun alles nach Potenzen von $(u - iK')$ entwickelt denken, wobei wir hinzunehmen, dass angesetzt werden kann:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{snu \,.\, sn(u+\beta)} = \dfrac{1}{u \,.\, sn\beta} - \dfrac{cn\beta \,.\, dn\beta}{sn^2\beta} + b_1 \,.\, u + b_2 \,.\, u^2 + \cdots, \\ \qquad \dfrac{1}{sn^2 u} = \dfrac{1}{u^2} + d_0 + d_2 \,.\, u^2 + \cdots, \\ \quad \Phi\left(v + \dfrac{\tau}{2}\right) = c\left(\dfrac{1}{u}\right)^m (1 + \lambda \,.\, u + K_2 \,.\, u^2 + K_3 \,.\, u^3 + \cdots). \end{cases} \tag{3}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von $(u - iK')^{-m-2}$ und $(u - iK')^{-m-1}$ erhalten wir die Gleichungen:

$$4)\qquad c_5 = m(m+1) - \frac{m \cdot c_2}{sn\beta},$$

$$5)\qquad c_4 = \lambda(-2m \cdot sn\beta + c_2) + m\frac{cn\beta \cdot dn\beta}{sn\beta}c_2.$$

Lassen sich nun zwei von einander verschiedene Werthe von λ bestimmen, so muss der Coefficient von λ gleich Null sein oder also es muss sein:

$$6)\qquad c_2 = 2msn\beta,$$

sodass die vorhin aufgestellten Gleichungen die Form annehmen:

$$7)\qquad c_4 = 2m^2 \cdot cn\beta \cdot dn\beta,$$

$$8)\qquad c_5 = -m(m-1).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Alle Differentialgleichungen 2ter Ordnung, deren Integrale beide doppeltperiodische Functionen sind und zwar bei verschiedenen Werthen von λ, müssen nothwendiger Weise die Form haben:

$$\frac{d^2y}{du^2} + p_1\frac{dy}{du} = p_2 y,$$

wobei p_1 und p_2 die Werthe besitzen:

$$p_1 = 2mk^2 \cdot sn\beta \cdot snu \cdot sn(u+\beta),$$

$$p_2 = c_3 + 2m^2k^2 \cdot cn\beta \cdot dn\beta \cdot snu \cdot sn(u+\beta) - m(m-1)k^2 \cdot sn^2u.$$

Etwas umständlicher ist der zweite Fall zu behandeln, in welchem die beiden Werthe von λ einander gleich sind. Wir können dann diesen Werth gleich Null annehmen, sodass die Entwickelung von

$$\Phi\left(v + \frac{\tau}{2}\right)$$

die Form annimmt:

$$\left(\frac{1}{u}\right)^m(1 + K_2 \cdot u^2 + K_3 \cdot u^3 + \cdots),$$

wobei die Grössen K aus den vorhin so bezeichneten entstehen, indem $\lambda = 0$ gesetzt wird. Durch Entwickelung um den Punkt $u = iK'$ und durch Vergleichung der Coefficienten der beiden niedrigsten Potenzen von $(u - iK')$ ergeben sich die Gleichungen:

$$9)\qquad c_5 = m(m+1) - \frac{mc_2}{sn\beta},$$

$$10)\qquad c_4 = -mc_1 sn\beta + mc_2\frac{cn\beta \cdot dn\beta}{sn\beta}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten der folgenden Potenzen ergiebt sich zunächst das Resultat, dass $c_2 : sn\beta$ eine der ganzen Zahlen $2m-1,\ 2m-2, \ldots 0,\ -1, \ldots$ sein muss. In der That, wir können diese Gleichungen als lineare mit den Unbekannten $K_2, K_3, \ldots$ ansehen. Aus denselben dürfen diese Grössen aber nicht eindeutig durch die in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommenden Grössen c bestimmt sein, da sich sonst nur ein Integral von der vorgeschriebenen Form ergeben würde.

Nun ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von $\varepsilon^{-m} (\varepsilon = u - iK')$:

$$11)\quad \begin{cases} (m-1)(m-2)K_2 + \left(\frac{(m-2)K_2}{sn\beta} + b_1 \cdot m\right)c_2 \\ \qquad = c_3 - \frac{cn\beta \cdot dn\beta}{sn^2\beta} c_4 + (d_0 + K_2)c_5, \end{cases}$$

oder also:

$$\left(-4m + 2 + \frac{2c_2}{sn\beta}\right)K_2 = mb_1 \cdot c_2 + c_3 - \frac{cn\beta \cdot dn\beta}{sn^2\beta} c_4 + d_0 \cdot c_5.$$

Durch diese Gleichung ist K_2 eindeutig durch die Coefficienten der Differentialgleichung bestimmt, es sei denn, dass:

$$c_2 = (2m-1) sn\beta$$

ist. Als nächste Gleichung ergiebt sich:

$$12)\quad \begin{cases} \left(-6m + 6 + \frac{3c_2}{sn\beta}\right)K_3 - (m-2)K_2 \cdot c_1 - \left(mb_2 - (m-2)K_2 \frac{cn\beta \cdot dn\beta}{sn^2\beta}\right)c_2 \\ \qquad = \left(b_1 + \frac{K_2}{sn\beta}\right)c_4 + d_1 \cdot c_5. \end{cases}$$

Aus ihr ist K_3 eindeutig durch K_2 und die Grössen c bestimmt, es sei denn, dass:

$$c_2 = (2m-2) sn\beta$$

ist. In ähnlicher Weise können wir weiter schliessen. Nehmen wir ganz allgemein den Coefficienten von ε^{r-2}, so tritt als höchster Index der Grössen K der Index $m+r$ auf. Die entsprechende Grösse K ist eindeutig durch die Grössen K mit niedrigerem Index und durch die in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Grössen bestimmt, sobald c_2 verschieden ist von $(m-r+1)sn\beta$. Daraus folgt das zu Beweisende unmittelbar, da im entgegengesetzten Falle die sämmtlichen Coefficienten eindeutig bestimmt wären.

Wir behaupten aber weiter, dass $\frac{c_2}{sn\beta}$ eine der ganzen Zahlen $2m-1,\ 2m-2, \ldots 1$ sein muss. Dazu denken wir uns alle Glieder unserer Differentialgleichung nach Potenzen von:

$$u + \beta - iK'$$

entwickelt, insbesondere gesetzt:

13) $\Phi(v) = L_0 + L_1(u + \beta - iK' + L_2(u + \beta - iK')^2 + \cdots$

Nehmen wir allgemein den Coefficienten von $(u + \beta - iK')^{r-2}$, so tritt in der entsprechenden Gleichung, die sich durch Coefficientenvergleichung ergiebt, als höchster Index der Grössen L der Index r auf. Die Grösse L_r ist eindeutig durch die Grössen L mit niedrigerem Index und die in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommenden Grössen bestimmt, wenn $c_2 : sn\beta$ verschieden ist von $r - 1$, wobei r die Werthe $1, 2, \ldots$ annehmen kann. Es muss also $c_2 : sn\beta$ einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots$ annehmen. Da wir den Werth 0, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, fortlassen können, so folgt unmittelbar die Richtigkeit des folgenden

Lehrsatzes: Alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den singulären Punkten iK' und $-\beta + iK'$, deren Integrale die vorgeschriebene Form haben, müssen nothwendiger Weise die Form besitzen:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{du^2} + [c_1 + c_2 . k^2 . snu . sn(u + \beta)] \dfrac{dy}{du} \\ \qquad = y[c_3 + c_4 . k^2 . snu . sn(u + \beta) + c_5 . k^2 . sn^2 u]. \end{cases}$$

Hierbei muss die Grösse $c_2 : sn\beta$ einen der Werthe:

$$2m - 1,\ 2m - 2, \ldots 1$$

bedeuten, ferner sind c_4 und c_5 aus den Gleichungen bestimmt:

$$c_4 = -m c_1 sn\beta + \frac{m\, cn\beta\, dn\beta}{sn\beta} c_2,$$

$$c_5 = m(m+1) - \frac{m c_2}{sn\beta}.$$

Endlich ist $\lambda = 0$ vorausgesetzt worden.

Das Problem kann noch weiter reducirt werden. Dazu setzen wir:

14) $$\psi(u) = \frac{\vartheta_0(v + b)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_1(b)}{\vartheta_1(b)} v},$$

dann wird nach den Ausführungen des ersten Theiles:

$$\frac{d \log \psi(u)}{du} = -\frac{cn\beta\, dn\beta}{sn\beta} - k^2 . sn\beta . snu . sn(u + \beta),$$

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} = \psi(u) \left(2k^2 . sn^2 u - 1 - k^2 + \frac{1}{sn^2\beta}\right).$$

Wir denken uns nun allgemein die Differentialgleichung vorgelegt:

$$15)\qquad \frac{d^2y}{du^2} + p_1 \frac{dy}{du} = y p_2$$

und setzen:

$$16)\qquad y = z \,.\, \psi^m(u),$$

dann geht dieselbe über in:

$$17)\qquad \frac{d^2z}{du^2} + P_1 \frac{dz}{du} = z \,.\, P_2,$$

wobei gesetzt ist:

$$18)\qquad \begin{cases} P_1 = 2m \dfrac{d\log\psi(u)}{du} + p_1, \\ P_2 = -m(m-1)\left(\dfrac{d\log\psi(u)}{du}\right)^2 - m\dfrac{\psi''(u)}{\psi(u)} - mp_1 \dfrac{d\log\psi_1(u)}{du} + p_2. \end{cases}$$

Führen wir die gefundenen Werthe für die Differentialquotienten von $\psi(u)$ ein, so ergiebt sich:

$$19)\qquad \begin{cases} P_1 = -2m\left(\dfrac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn\beta} + k^2 sn\beta\,.\,snu\,.\,sn(u+\beta)\right) + p_1, \\ P_2 = -m(m-1)\left(\dfrac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn\beta} + k^2 sn\beta\,.\,snu\,.\,sn(u+\beta)\right)^2 \\ \qquad -m\left(2k^2\,.\,sn^2u - 1 - k^2 + \dfrac{1}{sn^2\beta}\right) \\ \qquad +m\left(\dfrac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn\beta} + k^2 sn\beta\,.\,snu\,.\,sn(u+\beta)\right)p_1 + p_2. \end{cases}$$

Nun denken wir uns die Coefficienten p_1 und p_2 specialisirt. Wir setzen:

$$p_1 = c_1 + c_2\,.\,k^2\,.\,snu\,.\,sn(u+\beta),$$
$$p_2 = c_3 + c_4\,.\,k^2\,.\,snu\,.\,sn(u+\beta) + c_5\,.\,k^2\,.\,sn^2u,$$

wobei c_2 zunächst willkürlich angenommen werden kann. Dann folgt, dass P_1 geschrieben werden kann:

$$20)\qquad \begin{aligned} P_1 &= c'_1 + c'_2\,.\,k^2\,.\,snu\,.\,sn(u+\beta), \\ c'_1 &= c_1 - \frac{2m\,.\,cn\beta\,.\,dn\beta}{sn\beta}, \\ c'_2 &= c_2 - 2m\,.\,sn\beta. \end{aligned}$$

P_2 ist jedenfalls eine doppeltperiodische Function mit den Unendlichkeitspunkten $u = iK'$, $u = -\beta + iK'$, die wir in die Form bringen können:

$$21)\qquad P_2 = c'_3 + c'_4\,.\,k^2\,.\,snu\,.\,sn(u+\beta) + c'_5\,.\,k^2\,.\,sn^2(u+\beta) + c'_6\,.\,k^2\,.\,sn^2u.$$

Die Bestimmung der Grössen c' erfolgt durch Entwickelung um die Unendlichkeitspunkte. Wir erhalten die Resultate:

$$22)\left\{\begin{aligned} c'_3 &= c_3 - m c_2 . k^2 . sn\beta + m c_1 \frac{cn\beta . dn\beta}{sn\beta} - m^2\left(\frac{1}{sn^2\beta} - 1 - k^2\right),\\ c'_4 &= c_4 + m\left(c_1 . sn\beta - c_2 \frac{cn\beta . dn\beta}{sn\beta}\right),\\ c'_5 &= c_5 + m\left(\frac{c_2}{sn\beta} - m + 1\right),\\ c'_6 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Es geht die ursprüngliche Differentialgleichung also über in die Differentialgleichung:

$$23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2z}{du^2} + [c'_1 + c'_2 . k^2 . snu\, sn(u+\beta)]\frac{dz}{du}\\ &\qquad = z[c'_3 + c'_4 . k^2 . snu . sn(u+\beta) + c'_5 . k^2 . sn^2(u+\beta)], \end{aligned}\right.$$

deren beide Integrale die Form haben:

$$24)\quad z = e^{\lambda u}\prod \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v+b)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}v + m\frac{\vartheta'_1(b)}{\vartheta_1(b)}v},$$

vorausgesetzt, dass die Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung die Form haben:

$$y = e^{\lambda u}\prod \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}v}.$$

Wir wollen uns nun weiter in der Differentialgleichung für z gesetzt denken:

$$u + \beta = u_1,$$

dann geht dieselbe über in:

$$25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2z}{du_1^2} + [c'_1 + c'_2 . k^2 . snu_1 . sn(u_1 - \beta)]\frac{dz}{du_1}\\ &\qquad = z[c'_3 + c'_4 . k^2 . snu_1 . sn(u_1 - \beta) + c'_5 . k^2 . sn^2 u_1], \end{aligned}\right.$$

und ihre Integrale haben die Form:

$$26)\quad z = e^{\lambda u_1}\prod \frac{\vartheta_1(v_1 + a_r - b)}{\vartheta_0(v_1)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}v_1 + m\frac{\vartheta'_1(b)}{\vartheta_1(b)}v_1}.$$

Nun ist:

$$\frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} = \frac{\vartheta'_0(a_r - b)}{\vartheta_0(a_r - b)} - \left(\frac{\vartheta'_0(a_r - b)}{\vartheta_0(a_r - b)} - \frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)}\right)$$

und ferner gilt bekanntlich die Beziehung:

$$\frac{d\log\vartheta_0(a_r - b)}{d\alpha_r} = \frac{d\log\vartheta_0(a_r)}{d\alpha_r} - \frac{d\log\vartheta_0(b)}{d\beta} + k^2 . sn\beta . sn\alpha_r . sn(\alpha_r - \beta),$$

sodass der Ausdruck für z in die Form gebracht werden kann:

$$27)\quad z = e^{\lambda_1 u_1}\prod \frac{\vartheta_1(v_1 + a_r - b)}{\vartheta_0(v_1)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a_r - b)}{\vartheta_0(a_r - b)}v_1},$$

$$\lambda_1 = \lambda + m\frac{cn\beta . dn\beta}{sn\beta} + k^2 sn\beta \sum sn\alpha_r . sn(\alpha_r - \beta).$$

Setzen wir ferner:
$$a'_r = a_r - b,$$
so nehmen die Integrale die Form an:

$$28)\qquad e^{\lambda_1 u_1} \prod \frac{\vartheta_1(v_1 + a'_r)}{\vartheta_0(v_1)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a'_r)}{\vartheta_0(a'_r)} v_1}.$$

Setzen wir endlich an Stelle von β: $-\beta$, so haben wir eine Differentialgleichung derselben Form wie die ursprüngliche gefunden, deren Integrale gleichfalls die nämliche Form besitzen. Vermöge der angegebenen Formeln kann das Problem, die ursprüngliche Differentialgleichung zu integriren, auf das Problem zurückgeführt werden, die zuletzt gefundene Differentialgleichung zu integriren. Nun unterscheidet sich der Coefficient c_2 von dem Coefficienten c'_2 dadurch, dass:

$$\frac{c'_2}{sn\beta} = 2m - \frac{c_2}{sn\beta}$$

ist. Nimmt unter solchen Umständen $c_2 : sn\beta$ den Werth $2m$ an, so wird $c'_2 : sn\beta$ gleich Null.

Die auf diesem Wege gefundene Differentialgleichung ist aber, von unwesentlichen Unterschieden abgesehen, die Lamé'sche Differentialgleichung. Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche den aufgestellten Bedingungen Genüge leisten und bei welchen $c_2 = 2msn\beta$ ist (Fall der ungleichen λ) können durch Einführung neuer Veränderlichen auf die Lamé'sche Differentialgleichung zurückgeführt werden. Ferner können die Fälle:

$$\frac{c_2}{sn\beta} = 2m - 1,\ 2m - 2, \ldots m + 1$$

zurückgeführt werden auf die Fälle:

$$\frac{c_2}{sn\beta} = 1, 2, \ldots m - 1,$$

sodass wir uns auf diese und den Fall $c_2 = msn\beta$ beschränken können.

In Bezug auf diesen Satz werde vor allem auf die Arbeiten von Naetsch verwiesen.

In unseren Differentialgleichungen bleiben nun noch zwei Constanten c_1 und c_3 unbestimmt. Es kann gezeigt werden, dass c_3 eine Function von c_1 sein muss. Es ergiebst sich das, wenn wir diejenige Gleichung für die Bestimmung der Grössen K nehmen, bei welcher der Coefficient des zu bestimmenden Gliedes gleich Null ist. Diese Gleichung ist eine lineare Beziehung zwischen den vorangehenden Grössen K. Setzen wir deren Werthe aus den vorangehenden Gleich-

ungen ein, so erhalten wir eine Beziehung zwischen c_1 und c_3. Es bleibt in den genannten Picard'schen Differentialgleichungen also nur eine Constante c_1 völlig willkürlich. Damit ist die Theorie derselben, so weit es sich nicht um die wirkliche Auflösung handelt, völlig erledigt.

§ 42.

Auflösung der Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei singulären Punkten für den Fall $m = 1$.

Ehe wir die allgemeine Picard'sche Differentialgleichung mit zwei singulären Punkten weiter behandeln, mögen die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ besonders untersucht werden. Für $m = 1$ lautet die einzige in Betracht kommende Gleichung:

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2y}{du^2} + [c_1 + k^2 . sn\beta . snu . sn(u+\beta)] \frac{dy}{du} \\ &\qquad = y[c_3 + c_4 . k^2 . snu . sn(u+\beta) + k^2 . sn^2 u], \end{aligned} \right.$$

wobei zu setzen ist:

$$2)\quad \frac{c_4}{sn\beta} = -c_1 + \frac{cn\beta . dn\beta}{sn\beta}.$$

Um weitere Gleichungen zu erhalten, nehmen wir die Entwickelungen hinzu:

$$\frac{1}{snu} = \frac{1}{u} + \frac{1+k^2}{6} u + \frac{7 - 22k^2 + 7k^4}{3.5!} u^3 + \cdots,$$

$$\frac{1}{sn(u+\beta)} = \frac{1}{sn\beta} - b_1 u + b_2 . \frac{u^2}{2} - b_3 \frac{u^3}{3} \cdots,$$

$$b_1 = \frac{cn\beta . dn\beta}{sn^2\beta},$$

$$b_2 = \frac{2 - (1+k^2) sn^2\beta}{sn^3\beta},$$

$$b_3 = [6 - (1+k^2) sn^2\beta] \frac{cn\beta . dn\beta}{sn^4\beta},$$

. . . .

$$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{1}{u^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1 - k^2 + k^4}{15} u^2 + \cdots,$$

$$\frac{\vartheta_0(v+a)}{\vartheta_1(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} c} = \frac{c}{u}(1 + A_1 . u^2 + A_2 . u^3 + \cdots),$$

$$-2A_1 = k^2 . sn^2\alpha - \frac{1+k^2}{3},$$

$$-3A_2 = k^2 . sn\alpha . cn\alpha . dn\alpha,$$

$$-8A_3 = k^4 . sn^4\alpha - \frac{2(k^2+k^4)}{3} sn^2\alpha - \frac{7 - 22k^2 + 7k^4}{45}.$$

Es ergeben sich dann durch Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von u die weiteren Gleichungen:

$$3)\qquad c_1 = -k^2 . sn\alpha . sn\beta . sn(\alpha - \beta),$$

$$4)\qquad \frac{1}{sn^2\beta} = -c_3 + \frac{c_4 . cn\beta . dn\beta}{sn^2\beta}.$$

Aus der letzten Gleichung ist die Constante c_3 bestimmt und zwar wie es die allgemeine Theorie lehrt, ausgedrückt durch die einzige willkürliche Constante c_1.

Die Grösse α kann aus der Gleichung:

$$5)\qquad sn\alpha . sn(\alpha - \beta) = C$$

bestimmt werden, wobei C den Werth besitzt:

$$6)\qquad C = -\frac{c_1}{k^2 sn\beta}.$$

Wir setzen dazu:

$$\alpha = \omega_1 + \omega,$$
$$\alpha - \beta = \omega_1 - \omega,$$

das heisst:

$$7)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \alpha - \frac{\beta}{2}, \\ \omega = \frac{\beta}{2}, \end{cases}$$

so nimmt die Gleichung die Form an:

$$8)\quad \begin{cases} (sn\omega_1 . cn\omega . dn\omega - sn\omega . cn\omega_1 . dn\omega_1)(sn\omega_1 . cn\omega . dn\omega + sn\omega . cn\omega_1 . dn\omega_1) \\ \qquad = C(1 - k^2 . sn^2\omega . sn^2\omega_1)^2, \end{cases}$$

oder auch im Allgemeinen:

$$sn^2\omega_1 - sn^2\omega = C(1 - k^2 . sn^2\omega . sn^2\omega_1).$$

Aus derselben ergeben sich zwei Werthe von ω_1, die sich durch das Zeichen unterscheiden. Demgemäss erhalten wir auch zwei Werthe von α, nämlich:

$$\omega_1 + \frac{\beta}{2} \quad \text{und} \quad -\omega_1 + \frac{\beta}{2},$$

welche die beiden Integrale der vorgelegten Differentialgleichung bestimmen. Fassen wir die Resultate zusammen, so ergiebt sich der

Lehrsatz: Die einzige unter den angegebenen Bedingungen in Betracht kommende Picard'sche Gleichung lautet:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{du^2} + [c_1 + k^2 sn\beta . snu . sn(u + \beta)] \frac{dy}{du} \\ \qquad = y[c_3 + c_4 . k^2 . snu . sn(u + \beta) + k^2 . sn^2 u], \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{c_4}{sn\beta} = -c_1 + \frac{cn\beta\, dn\beta}{sn\beta},$$

$$c_3 = -\frac{1}{sn^2\beta} + c_4\frac{cn\beta\, dn\beta}{sn^2\beta}.$$

Die beiden Integrale haben die Form:

$$\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)}v}.$$

Die entsprechenden Werthe von a sind gleich:

$$\pm\,\omega_1 + \frac{\beta}{2},$$

wobei ω_1 der Gleichung Genüge leistet:

$$sn^2\omega_1 \quad sn^2\frac{\beta}{2} = -\frac{c_1}{k^2 sn\beta}\left(1 - k^2 sn^2\frac{\beta}{2}\cdot sn^2\omega_1\right).$$

§ 43.

Auflösung der Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei singulären Punkten für den Fall $m = 2$.

Wir nehmen jetzt den Fall $m = 2$. Die in Betracht kommenden Differentialgleichungen haben die Form:

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{du^2} + [c_1 + c_2\,.\,k^2.\,snu\,.\,sn(u+\beta)]\,\dfrac{dy}{du} \\ \qquad = y[c_3 + c_4\,.\,k^2.\,snu\,.\,sn(u+\beta) + c_5\,.\,k^2.\,sn^2u]. \end{cases}$$

Entwickeln wir die rechte wie die linke Seite um den Punkt $u = iK'$ herum, so ergeben sich durch Coefficientenvergleichung — wobei $\lambda = 0$ angenommen werden kann — zunächst die Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} c_5 = 6 - \dfrac{2c_2}{sn\beta}, \\ c_4 = -2c_1\,.\,sn\beta + 2c_2\dfrac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn\beta}, \\ \dfrac{c_5 k^2}{2}(x_1 + x_2) = 2c_1\dfrac{cn\beta\, dn\beta}{sn\beta} - 2c_2\,.\,k^2.\,sn\beta + c_3 + 4(1+k^2), \\ k^2 sn\beta(u_1+u_2)(c_2 - 2sn\beta) = 2c_1 + c_4\dfrac{k^2.\,sn\beta}{2}(x_1 + x_2), \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = sn^2\alpha_1, \quad x_2 = sn^2\alpha_2, \\ u_1 = sn\alpha_1\,.\,cn\alpha_1\,.\,dn\alpha_1, \quad u_2 = sn\alpha_2\,.\,cn\alpha_2\,.\,dn\alpha_2. \end{cases}$$

Um alle in Betracht kommenden Grössen zu bestimmen, müsste noch eine weitere Gleichung hinzugenommen werden. Wir ziehen es

vor, an deren Stelle zwei Gleichungen zu wählen, von denen die eine dann unter Zuhülfenahme der soeben aufgestellten Gleichungen eine Folge der andern ist. Die beiden Gleichungen ergeben sich, wenn wir hinzunehmen, dass die Integrale der Differentialgleichung die Form haben sollen:

$$4)\qquad y = \frac{\vartheta_1(v + a_1)\vartheta_1(v + a_2)}{\vartheta_0^2(v)} e^{-\left(\frac{\vartheta'_0(a_1)}{\vartheta_0(a_1)} + \frac{\vartheta'_0(a_2)}{\vartheta_0(a_2)}\right)v}.$$

Setzen wir links und rechts $v = -a_1$ und $v = -a_2$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$5)\qquad c_1 + c_2 . k^2 . sn a_1 . sn(a_1 - \beta) = 2\frac{u_1 + u_2}{x_1 - x_2},$$

$$6)\qquad c_1 + c_2 . k^2 . sn a_2 . sn(a_2 - \beta) = 2\frac{u_1 + u_2}{x_2 - x_1}.$$

An ihrer Stelle können wir schreiben:

$$7)\qquad c_2 . k^2 . sn\beta . u_1 = \delta_1 . c_1 + c_2 . k^2 . sn^2 a_1 . cn\beta . dn\beta - 2u\frac{\delta_1}{d},$$

$$8)\qquad c_2 . k^2 . sn\beta . u_2 = \delta_2 . c_1 + c_2 . k^2 . sn^2 a_2 . cn\beta . dn\beta + 2u\frac{\delta_2}{d},$$

wobei gesetzt ist:

$$9)\qquad \begin{cases} \delta_r = 1 - k^2 . sn^2\beta . sn^2 a_r, \quad r = 1, 2, \\ d = sn^2 a_1 - sn^2 a_2, \\ u = u_1 + u_2. \end{cases}$$

Aus den letzten Gleichungen ergeben sich u_1 und u_2 als rationale Functionen der Grössen x und zwar wird:

$$10)\qquad \begin{cases} c_2 . k^4 . sn^2\beta(c_2 - 2sn\beta)\, u_1 = c_1 . \delta_1\left(c_2 . k^2 . sn\beta - \dfrac{4\delta_2}{d}\right) \\ \quad + c_2 . k^2 . cn\beta . dn\beta\left(c_2 . k^2 . sn a . x_1 - 2\dfrac{x_1 . \delta_2 + x_2 . \delta_1}{d}\right) \end{cases}$$

und analog ergiebt sich der Werth von u_2.

Bis hierher gelten die Betrachtungen allgemein. Unsere Theorie lehrt nun, dass wir uns auf die drei Fälle:

$$c_2 = sn\beta, \quad c_2 = 2sn\beta, \quad c_2 = 3sn\beta$$

beschränken können, sie lehrt ferner, dass wir den dritten Fall durch eine Substitution auf den ersten zurückführen können. Wir wollen von dieser Zurückführung hier absehen, da die Rechnung sich nur wenig modificirt, nachdem einmal die allgemeinen Formeln aufgestellt worden sind.

Wir setzen erstens:
$$c_2 = sn\beta.$$

Indem wir die rechte und die linke Seite von Gleichung 7) quadriren und den Factor δ_1 fortlassen, wozu wir im allgemeinen berechtigt sein werden, erhalten wir:

$$11)\qquad d^2.A_1 + 4u.d.B_1 - 4u^2.\delta_1 = 0,$$

$$A_1 = -c_1^2 + sn^2\alpha_1(k^4.sn^4\beta + c_1^2.k^2.sn^2\beta - 2c_1.k^2.sn\beta.cn\beta.dn\beta) - k^4.sn^2\beta.sn^4\alpha_1,$$

$$B_1 = c_1 - k^2.sn^2\alpha_1(c_1.sn^2\beta - sn\beta.cn\beta.dn\beta).$$

Eine ganz analoge Gleichung würde sich durch Quadrirung aus der Gleichung 8) ergeben. Wir erhalten dieselbe, indem wir an Stelle von $sn\alpha_1$ uns $sn\alpha_2$ in der letzten Gleichung gesetzt denken und umgekehrt, sodass wir erhalten:

$$12)\qquad d^2.A_2 - 4u.d.B_2 - 4u^2.\delta_2 = 0,$$

wobei die Werthe von A_2 und B_2 nicht hingeschrieben zu werden brauchen.

Durch Subtraction und Fortlassung des Factors d ergiebt sich dann die Relation:

$$13)\qquad d^2.C_1 + 4u.C_2 + 4u^2.k^2.sn^2\beta = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$C_1 = k^4.sn^4\beta + c_1.k^2.sn^2\beta - 2c_1.k^2.sn\beta.cn\beta.dn\beta - k^4.sn^2\beta.s_1,$$

$$C_2 = 2c_1 - s_1.k^2(c_1.sn^2\beta - sn\beta.cn\beta.dn\beta) = 2c_1 + \frac{c_4.k^2.sn\beta.s_1}{2},$$

$$s_1 = x_1 + x_2,$$

Nun ist aber, wie aus den Bedingungsgleichungen unmittelbar folgt:

$$C_2 + uk^2sn^2\beta = 0,$$

also folgt $C_1 = 0$ oder wir erhalten die Gleichung:

$$14)\qquad k^2.sn^4\beta + c_1^2sn^2\beta - 2c_1.sn\beta.cn\beta.dn\beta = k^2.s_1.sn^2\beta.$$

Setzen wir den früher gefundenen Werth von s_1 ein, so ergiebt sich für c_3 der Ausdruck:

$$15)\qquad c_3 = 2c_1^2 - 6c_1\frac{cn\beta\,dn\beta}{sn\beta} + 4k^2sn^2\beta - 4(1+k^2).$$

Damit ist die noch fehlende Beziehung zwischen den Coefficienten abgeleitet.

Führen wir nun die Gleichung 11) aus, so ergiebt sich für x_1 die Relation:

$$16)\qquad p_0.x_1^4 + p_1.x_1^3 + p_2.x_1^2 + p_3.x_1 + p_4 = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$p_0 = -4k^4.sn^2\beta,$$

$$p_1 = 8k^4.sn^2\beta.s_1,$$

$$p_2 = -13s_1^2.k^4.sn^2\beta + 8s_1.k^2(1+k^2)sn^2\beta + 4c_1^2 - 8k^2.sn^2\beta,$$

$$p_3 = 9k^4.s_1^3.sn^2\beta - 8k^2(1+k^2)s_1^2.sn^2\beta - 4c_1^2.s_1 + 8k^2.sn^2\beta.s_1.$$

Dieser Gleichung leistet dann auch die Grösse x_2 Genüge, die mit x_1 durch die Gleichung:

$$x_1 + x_2 = s_1$$

verbunden ist. Es zerfallen demgemäss die vier Wurzeln in zwei Paare:

$$x_1 x_2$$
$$x'_1 x'_2$$

die durch die Gleichungen verbunden sind:

$$x_1 + x_2 = s_1,$$
$$x'_1 + x'_2 = s_2.$$

und daher zu den beiden Integralen der Differentialgleichung gehören. Es sind durch dieselben die Grössen α_1 und α_2, die zu den Integralen gehören, bis auf das Zeichen bestimmt. Das Zeichen selbst folgt aus den aufgestellten Gleichungen für u_1 und u_2, sodass das Problem damit vollständig gelöst ist.

An Stelle der Gleichung vierten Grades können wir auch zwei quadratische aufstellen, indem wir die quadratische Gleichung suchen, welcher die Grösse:

$$s_2 = x_1 x_2$$

Genüge leistet. Dieselbe erhalten wir, indem wir die rechten und linken Seiten der Gleichung 11) und 12) addiren.

Es ergiebt sich:

$$17)\quad \begin{cases} q_0 \cdot s_2{}^2 + q_1 \cdot s_2 + q_2 = 0, \\ q_0 = 4k^4 . sn^4\beta, \\ q_1 = q_1{}' - q_0 \dfrac{s_1{}^4}{4}, \\ q_2 = -\dfrac{q_1{}' . s_1{}^2}{4} + 2u^2 . sn^2\beta(2 - k^2 sn^2\beta . s_1), \\ q_1{}' = -4k^2 sn^4\beta[1 - (1 + k^2)s_1 + k^2 . s_1{}^2] \\ \qquad - 4k^2 sn^2\beta(c_1 . sn^2\beta - sn\beta . cn\beta . dn\beta)u. \end{cases}$$

Es ergeben sich demnach zwei Werthe von s_2. Die entsprechenden Grössen x_1, x_2 sind aus den beiden Gleichungen zu berechnen:

$$18)\qquad x^2 - s_1 x + s_2 = 0.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Als erster Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{du^2} + [c_1 + k^2 . sn\beta . sn u . sn(u + \beta)] \dfrac{dy}{du} \\ \qquad = y[c_3 + c_4 k^2 . sn u . sn(u + \beta) + 4k^2 . sn^2 u], \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$c_3 = 2c_1^2 - 6c_1 \frac{cn\beta\, dn\beta}{sn\beta} + 4k^2 sn^2\beta - 4(1+k^2),$$

$$c_4 = -2c_1 sn\beta + 2cn\beta\, dn\beta.$$

Die beiden Integrale derselben lassen sich durch Auflösung einiger einfachen vorhin aufgestellten quadratischen Gleichungen wirklich berechnen.

Wir nehmen jetzt zweitens:

$$c_2 = 2sn\beta.$$

Gehen wir zu den Grundgleichungen zurück, so zeigt sich, dass aus der vierten derselben die Grösse u nicht bestimmt werden kann, sodass für s_1 sich zwei lineare Gleichungen ergeben. Die Elimination von s_1 ergiebt dann die fehlende Coefficientenbeziehung und zwar nimmt dieselbe die Form an:

$$19)\quad c_3 = -\frac{2c_1}{sn\beta}\left(cn\beta\, .\, dn\beta + \frac{2}{c_4}\right) + 4k^2 . sn^2\beta - 4(1+k^2).$$

Das ganze Problem wäre gelöst, wenn es gelänge, für s_2 eine quadratische Gleichung zu finden und überdies u rational durch s_1 und s_2 auszudrücken.

Wir gehen dazu zu den beiden Gleichungen zurück:

$$11)\quad d^2 . A_1 + 4u . d . B_1 - 4u^2 . \delta_1 = 0,$$

$$12)\quad d^2 . A_2 - 4u . d . B_2 - 4u^2 . \delta_2 = 0.$$

Durch Subtraction erhalten wir die Gleichung:

$$20)\quad d^2(D - 4k^4 . sn^2\beta . s_1) + 4u^2 . k^2 . sn^2\beta = 0,$$

wenn wir unter D die Grösse verstehen:

$$D = 4k^4 . sn^4\beta - 4c_1 . k^2 . sn\beta . cn\beta . dn\beta + c_1^2 . k^2 . sn^2\beta.$$

Ganz analog ergiebt sich durch Addition:

$$21)\quad d^2 . E - 4u^2(2 - k^2 . sn^2\beta . s_1) = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$E = -2c_1^2 + D . s_1 - 4k^4 . sn^2\beta(s_1^2 - 2s_2) + 2k^2 . u . c_4 . sn\beta.$$

Eliminiren wir aus den gefundenen beiden Gleichungen die Grösse u^2, so erhalten wir für u die Darstellung:

$$22)\quad 2k^4 . c_4 . sn^3\beta . u = 2c_1^2 k^2 sn^2\beta + 2(4sn^2\beta\, k^4 s_1 - D) - 8k^6 sn^4\beta s_2.$$

Wird dieser Werth in Gleichung 20) eingesetzt, so erhalten wir die gesuchte quadratische Gleichung mit der Unbekannten s_2. Unter solchen Umständen ergiebt sich der

Lehrsatz: Als zweiter Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2y}{du^2} + [c_1 + 2k^2.sn\beta.snu.sn(u+\beta)]\frac{dy}{du} \\ &\quad = y[c_3 + c_4.k^2.snu.sn(u+\beta) + 2k^2.sn^2u], \end{aligned} \right.$$

wobei gesetzt ist:

$$c_3 = -\frac{2c_1}{sn\beta}\left(cn\beta\,.\,dn\beta + \frac{2}{c_4}\right) + 4k^2.sn^2\beta - 4(1+k^2),$$

$$c_4 = -2c_1.sn\beta + 4cn\beta.dn\beta.$$

Die beiden Integrale lassen sich durch Auflösung einiger quadratischer Gleichungen wirklich bestimmen.

Wir nehmen jetzt drittens an:

$$c_2 = 3sn\beta.$$

Dann wird c_5 gleich Null und wir erhalten die Constantenbeziehungen:

$$23) \qquad c_3 = -\frac{2c_1.cn\beta.dn\beta}{sn\beta} + 6k^2.sn^2\beta - 4(1+k^2),$$

$$24) \qquad c_4 = -2c_1.sn\beta + 6cn\beta.dn\beta,$$

wobei c_1 willkürlich bleibt Zu diesen Gleichungen treten die weiteren hinzu:

$$25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &d^2.A_1 + 4u.d.B_1 - 4u^2.\delta_1 = 0, \\ &d^2.A_2 - 4u.d.B_2 - 4u^2.\delta_2 = 0, \\ &k^2sn^2\beta.u = 2c_1 + \frac{k^2c_4}{2}sn\beta.s_1. \end{aligned} \right.$$

Subtrahiren wir die beiden vorletzten Gleichungen, so ergiebt sich nach Fortlassung des Factors d die Gleichung:

$$26) \qquad d^2(D_1 - 9k^4.sn^2\beta.s_1) + 8u^2.k^2.sn^2\beta = 0,$$

wenn wir der Einfachheit halber setzen:

$$D_1 = 9k^4.\,sn^4\beta - 6c_1.\,k^2.\,sn\beta\,.\,cn\beta\,.\,dn\beta + c_1^2.\,k^2.sn^2\beta.$$

Durch Addition ergiebt sich die Gleichung:

$$27) \qquad d^2.\,E_1 - 4u^2(2 - k^2sn^2\beta\,.\,s_1) = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$E_1 = -2c_1^2 + D_1.s_1 - 9k^4.sn^2\beta.s_1^2 + 18k^4.sn^2\beta.s_2 + 2k^2.\,sn\beta.c_4.u.$$

Eliminiren wir aus den beiden durch Addition und Subtraction gewonnenen Gleichungen die Grösse u, so ergiebt sich:

$$-k^4sn^2\beta(s_1^2 - 4s_2) = C_0'\,.\,s_1 + C_1',$$

$$C_0' = k^2c_1^2.sn^2\beta - 6k^2.c_1.sn\beta.cn\beta.dn\beta + k^2[6 - 8(1+k^2)sn^2\beta + 9k^2.sn^4\beta],$$

$$C_1' = -2c_1^2 + 4c_1\frac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn\beta} + 2k^2.\,sn^2\beta.$$

[illegible] in eindeutiger Weise bestimmt, sobald s_1 [illegible] die Gleichung besteht:

$$d^2 = s_1^{\,2} - 4s_2,$$

[illegible] gleicher Zeit, dass d^2 eine lineare Function von s_1 ist. [illegible] diesen Werth in Gleichung 26) ein und erwägen, dass die [illegible] besteht:

$$[illegible]\; sn^4\beta\,.\,a^2 = 4c_1^{\,2} + 2k^2.sn\beta\,.\,c_1\,.\,c_4\,.\,s_1 + \frac{k^4.sn^2\beta}{4}\, c_4^{\,2}.s_1^{\,2},$$

[illegible] geht unsere Gleichung in eine quadratische mit der Unbekannten s_1 über. Damit ist wieder alles gemacht und wir finden, dass die gestellte Aufgabe analog wie in den anderen Fällen auf die Auflösung einiger einfacher quadratischer Gleichungen reducirt werden kann. Somit ergiebt sich der

Lehrsatz: Als dritter Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{du^2} + [c_1 + 3k^2.sn\beta.snu.sn(u+\beta)]\frac{dy}{du} = y[c_3 + c_4.k^2.snu.sn(u+\beta)],$$

wobei gesetzt ist:

$$c_3 = -2c_1\frac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn\beta} + 6k^2.sn^2\beta - 4(1+k^2),$$

$$c_4 = -2c_1.sn\beta + 6cn\beta\,.\,dn\beta.$$

Die beiden Integrale lassen sich durch Auflösung einiger einfacher quadratischer Gleichungen wirklich bestimmen.

§ 44.

Anderweite Lösung desselben Problems. Auflösung der allgemeinen Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei singulären Punkten.

Die Auflösung der im vorigen Paragraphen entwickelten Differentialgleichungen ist so angestellt worden, dass zwei verschiedene Integrationsmethoden miteinander vermischt wurden. Wir wollen jetzt dasselbe Problem in einheitlicher Weise lösen, so zwar, dass die Verallgemeinerung auf den Fall eines beliebigen m unmittelbar klar ist. Dabei soll jetzt im Gegensatz zum vorigen Paragraphen das Hauptgewicht auf die Methode gelegt werden, während die wirkliche Darstellung aller nothwendigen Grössen nicht noch einmal durchgeführt werden soll.

Dazu erinnern wir an die folgenden Resultate des ersten Bandes. Die Function:

$$\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)}v}$$

lässt sich um den Unendlichkeitspunkt herum in der Form darstellen:

$$c\cdot\frac{1}{\varepsilon}(1-A_2.\varepsilon^2-A_3.\varepsilon^3-A_4.\varepsilon^4\ldots),$$

wobei die Grössen A jedenfalls geschrieben werden können:

$$\begin{aligned}
g_2.A_2 &= k^2.x+a_{12},\\
g_4.A_4 &= k^4.x^2+a_{14}.x+a_{24},\\
g_6.A_6 &= k^6.x^3+a_{16}.x^2+a_{26}.x+a_{36},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
g_3.A_3 &= k^2.u,\\
g_5.A_5 &= k^2.u(k^2.x+b_{15}),\\
g_7.A_7 &= k^2.u(k^4.x^2+b_{17}.x+b_{27}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dabei sind die Grössen a und b Constanten, ferner haben x und u die Bedeutung:

1) $$x = sn^2\alpha,\quad u = sn\alpha.cn\alpha.dn\alpha.$$

Die Grössen g sind positive ganze Zahlen und zwar wird:

$$g_2=2,\quad g_4=2.4,\quad g_6=2.4.18,\quad g_8=2.4.18.40,$$
$$g_{10}=2.4.18.40.70$$
etc.

$$g_3=3,\quad g_5=3.10,\quad g_7=3.10.28,\quad g_9=3.10.28.54,$$
$$g_{11}=3.10.28.54.88$$
etc.

Ganz allgemein tritt bei g_{2r} der Factor hinzu:

$$(2r-1)(2r-2)-2,$$

bei g_{2r+1} dagegen der Factor:

$$2r(2r-1)-2.$$

Nun nehmen wir die Function:

$$\prod\frac{\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)}v},$$

wobei das Product über a zu nehmen ist, und a der Reihe nach die Werthe $a_1, a_2 \ldots a_m$ annimmt. Die Entwickelung dieses Productes um den Unendlichkeitspunkt herum hat dann die Form:

$$C\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m(1+K_2\varepsilon^2+K_3\varepsilon^3+\cdots),$$

wobei nunmehr gesetzt ist:

$$
2)\quad \begin{cases}
K_2 = -\sum A_2^{(1)}, \\
K_3 = -\sum A_3^{(1)}, \\
K_4 = -\sum A_4^{(1)} + \sum A_2^{(1)} A_2^{(2)}, \\
K_5 = -\sum A_5^{(1)} + \sum A_2^{(1)} A_3^{(2)}, \\
K_6 = -\sum A_6^{(1)} + \sum A_2^{(1)} . A_4^{(2)} + \sum A_3^{(1)} . A_3^{(2)} - \sum A_2^{(1)} . A_2^{(2)} . A_2^{(3)}, \\
K_7 = -\sum A_7^{(1)} + \sum A_2^{(1)} . A_5^{(2)} + \sum A_3^{(1)} . A_4^{(2)} - \sum A_2^{(1)} . A_2^{(2)} . A_3^{(3)}, \\
K_8 = -\sum A_8^{(1)} + \sum A_2^{(1)} . A_6^{(2)} + \sum A_3^{(1)} . A_5^{(2)} + \sum A_4^{(1)} . A_4^{(2)} \\
\qquad - \sum A_2^{(1)} . A_2^{(2)} . A_4^{(3)} - \sum A_2^{(1)} . A_3^{(2)} . A_3^{(3)} + \sum A_2^{(1)} . A_2^{(2)} . A_2^{(3)} A_2^{(4)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Bis hierher gelten die Betrachtungen allgemein. Wir wollen nun zunächst specialisiren und $m = 2$ setzen.

Vor der Behandlung dieses Falles erinnern wir noch an die unmittelbar abzuleitenden Beziehungen:

$$\sum x_1^\alpha . x_2^\beta = s_\alpha . s_\beta - s_{\alpha+\beta},$$

$$2 \sum x_1^\alpha . x_2^\alpha = s_\alpha^2 - s_{2\alpha},$$

$$\sum u_1 . x_1^\alpha . u_2 . x_2^\beta = \sum u_1 . x_1^\alpha \sum u_1 . x_1^\beta - \sum u_1^2 . x_1^{\alpha+\beta},$$

$$2 \sum u_1 . x_1^\alpha . u_2 . x_2^\alpha = \left(\sum u_1 . x_1^\alpha\right)^2 - \sum u_1{}^2 . x_1^{2\alpha},$$

$$\sum u_1 . x_1^\alpha . x_2^\beta = \sum u_1 . x_1^\alpha \sum x_2^\beta - \sum u_1 . x_1^{\alpha+\beta}.$$

Die Grössen s sind die entsprechenden Potenzsummen. Im Falle $m = 2$ können wir uns nun, wie gezeigt, auf die beiden Fälle beschränken: $c_2 = 2sn\beta$, $c_2 = sn\beta$. Wir nehmen:

I. $c_2 = 2sn\beta$.

Der Gesichtspunkt ist ein doppelter. Wir setzen erstens die Reihenentwickelung

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(1 + K_2 . \varepsilon^2 + K_3 . \varepsilon^3 + \cdots)$$

in die Differentialgleichung ein, nachdem wir deren Coefficienten in der analogen Weise dargestellt haben. Es ist dann, wie früher gezeigt, K_2 bestimmt, K_3 unbestimmt, die höheren K drücken sich sämmtlich linear durch K_3 aus.

Andererseits haben wir aber für die Grössen K die soeben hingeschriebenen Ausdrücke mit Hülfe der Productdarstellung der Integrale gefunden. Aus dem Ausdruck für K_2 folgt die Bestimmung von s_1.

Aus der zweiten Gleichung für K_3 drückt sich $\sum u$ linear durch K_3 aus und umgekehrt. Ersetzen wir also in den vorhin erwähnten Ausdrücken der höheren K die Grösse K_3 durch $\sum u$, so folgt, dass die sämmtlichen Grössen $K_4, K_5, \ldots$ sich jedenfalls linear durch $\sum u$ darstellen lassen.

Betrachten wir die zweite Darstellung von K_4, so drückt sich durch dieselbe K_4 linear durch s_2 aus und umgekehrt. Unter solchen Umständen giebt die erste Darstellung von K_4 eine lineare Darstellung von s_2 durch $\sum u$. Analog können wir mit Hülfe der zweiten Darstellung von K_5 die Grösse $\sum u.x$ durch $\sum u$ linear darstellen. Wäre demnach $\sum u$ bekannt, so wären auch die Grössen $\sum x, \sum x^2, \sum ux$ bekannt, d. h. das Problem gelöst. Um nun schliesslich $\sum u$ zu bestimmen, gehen wir zu K_6 über. Einerseits drückt K_6 sich linear durch $\sum u$ aus, andererseits aber quadratisch.

Es ergiebt sich das unmittelbar aus der Gleichung:

$$K_6 = -\sum A_6^{(1)} + \sum A_2^{(1)}.A_4^{(2)} + \sum A_3^{(1)}.A_3^{(2)}.$$

In der That, in dem Gliede:

$$A_3^{(1)}.A_3^{(2)}$$

tritt das Product $u_1.u_2$ auf und dieses ist gegeben durch die Relation:

$$2u_1.u_2 = (u_1 + u_2)^2 - u_1^2 - u_2^2.$$

Es tritt also $\left(\sum u\right)^2$ in diesem Gliede auf, während es in den andern Gliedern überhaupt nicht vorkommt. Die Vergleichung der beiden Ausdrücke für K_6 ergiebt dann eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten $\sum u$. Damit sind wir zu ähnlichen Resultaten wie im vorigen Paragraphen gelangt — jedenfalls ist das Problem als gelöst anzusehen.

Wir nehmen zweitens:

$$c_2 = sn\beta.$$

Dann ist vermöge der Differentialgleichung K_2 und K_3 eindeutig bestimmt, K_4 unbestimmt, die höheren K drücken sich linear durch K_4 aus. Aus der zweiten Darstellung der Grössen K folgt dann die eindeutige Bestimmung von s_1 und $\sum u$, ferner, dass die Grössen $K_5, K_6, \ldots$ sich linear zunächst durch die Grösse s_2 darstellen lassen. Nehmen wir die zweite Darstellung von K_5, so wird mit ihrer Hülfe $\sum u.x$ linear durch s_2 ausgedrückt, sodass es jetzt sich nur noch darum handelt, die Grösse s_2 zu bestimmen. K_6 ergiebt diese Bestimmung

nicht, ebensowenig K_7, wohl aber K_8 und zwar giebt die Vergleichung der beiden Werthe von K_8 eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten s_2. Dass dem so ist, zeigt der Ausdruck, den wir vorhin für K_8 aufgestellt haben:

$$K_8 = -\sum A_8^{(1)} + \sum A_2^{(1)} . A_6^{(2)} + \sum A_3^{(1)} . A_5^{(2)} + \sum A_4^{(1)} . A_4^{(2)}.$$

Auf der rechten Seite kommt s_4 neben s_2^2 vor. Drücken wir s_4 durch s_2 aus, so zeigt sich, dass der Factor von s_2^2 jedenfalls von Null verschieden sein muss. Damit erhalten wir wiederum Resultate, die denen des vorigen Paragraphen analog sind. Jedenfalls kann die Integration der Differentialgleichung als vollendet angesehen werden.

Die soeben betrachtete Methode kann unmittelbar für ein beliebiges m verallgemeinert werden.

Zu betrachten sind die Werthe:

$$c_2 = h\, sn \beta,$$

wobei h die Zahlen $1, 2, \dots m$ durchlaufen kann. Setzen wir dann die Reihenentwickelung:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m (1 + K_2 . \varepsilon^2 + K_3 . \varepsilon^3 + \cdots)$$

in die Differentialgleichung ein und ziehen die früheren Schlüsse, so folgt die eindeutige Bestimmung der Grössen:

$$K_2, K_3, \dots K_{2m-h}.$$

Die Grösse K_{2m-h+1} bleibt unbestimmt, so zwar, dass die entsprechende Gleichung die Bestimmung von c_3 liefert, die höheren K:

$$K_{2m-h+2}, \quad K_{2m-h+3}, \dots$$

drücken sich linear durch K_{2m-h+1} aus. Die Unbestimmtheit der Grösse K_{2m-h+1} kann durch die Differentialgleichung allein nicht gehoben werden, wohl aber durch die Bedingung, dass die Integrale doppeltperiodische Functionen sein müssen. Um dieses nachzuweisen, führen wir wiederum die algebraische Gleichung ein, welcher die Grössen x Genüge leisten:

3) $$x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots p_m = 0.$$

Die Grössen p sind bestimmt, wenn die Grössen s bestimmt sind und umgekehrt, sodass wir die einen durch die andern ersetzen können. Ferner führen wir wiederum die Grössen:

4) $$q_l = u_1 . x_1^l + \cdots u_m . x_m^l$$

ein. Wir bringen nun die Grössen s und q in die Reihe:

$$s_1, q_0, s_2, q_1, \dots$$

und bezeichnen sie durch:

$$\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \dots$$

Wir stellen dann als erstes Problem die Aufgabe, die Grössen:

$$\varrho_2, \varrho_3, \dots \varrho_{2m+1}$$

zu bestimmen.

Nehmen wir dazu die zweite Ausdrucksweise der Grössen K, so folgt, dass allgemein die Grösse ϱ_{r+1} für $r = 1, 2, \dots 2m$ in den Grössen:

$$K_2, K_3, \dots K_r$$

gar nicht vorkommen kann, in den Grössen:

$$K_{r+1}, K_{r+2}, \dots K_{2r+1}$$

nur linear, in den Grössen:

$$K_{2r+2}, \dots K_{3r+2}$$

nur quadratisch etc. In diesem Umstand liegt die Lösung des Problems.

In der That, vermöge der zweiten Darstellungsweise der Grössen $K_2, \dots K_{2m-h}$ können wir dieselben derart ausdrücken durch

$$\varrho_2, \varrho_3, \dots \varrho_{2m-h},$$

dass die letzteren Grössen eindeutig bestimmt sind. Die zweite Darstellung von K_{2m-h+1} drückt diesen Ausdruck linear durch ϱ_{2m-h+1} aus, sodass dieser Ausdruck zunächst unbestimmt bleibt. Die erste Darstellung der folgenden Grössen:

$$K_{2m-h+2}, \quad K_{2m-h+3}, \dots$$

drückt dann diese Grössen sämmtlich linear durch ϱ_{2m-h+1} als einzige Unbekannte aus, die zweite Darstellung derselben Grössen ermöglicht die Darstellung der Grössen:

$$\varrho_{2m-h+2}, \dots \varrho_{2m+1}$$

durch die Unbekannte ϱ_{2m-h+1}. Also folgt, dass alle gesuchten Grössen sich in bekannter eindeutiger Weise durch eine einzige einstweilen noch unbekannte Grösse ϱ_{2m-h+1} ausdrücken lassen. Die Bestimmung der letzteren erfolgt nun analog wie im Falle $m = 2$ durch eine quadratische Gleichung, indem wir die beiden Darstellungen entsprechender höherer K mit einander vergleichen. Nehmen wir z. B. $h = m$, so ist ϱ_{m+1} die unbestimmte Grösse. K_{2m+2} drückt sich vermöge der Differentialgleichung linear durch ϱ_{m+1} aus, vermöge der Darstellung des Integrals in der Productform quadratisch durch ϱ_{m+1}, die Vergleichung beider Ausdrücke giebt dann eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten ϱ_{m+1}. Damit ist das gestellte Problem gelöst und analog können wir für jeden weiteren Werth von h verfahren. Unter solchen Umständen ergiebt sich der

Lehrsatz: Die sämmtlichen Grössen

$$\varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{2m+1}$$

drücken sich in eindeutiger Weise durch eine einzige unter ihnen aus, die ihrerseits einer quadratischen Gleichung Genüge leistet.

Es ergeben sich also zwei algebraische Gleichungen:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots p_m = 0,$$

die zu den beiden doppeltperiodischen Integralen gehören. Aus ihnen sind die Grössen $sn^2\alpha_r$ demnach bestimmt und es wäre das ganze Problem gelöst, wenn es noch gelänge, die Vorzeichen der Grössen α_r zu bestimmen.

Es geschieht das mit Hülfe der Grössen u, die auf folgendem Wege bestimmt werden können.

Wir bilden die Grössen:

$$5a) \quad \begin{cases} U_0 = \sum u_r, \\ U_1 = \sum u_r(x_r + p_1), \\ U_2 = \sum u_r(x_r^2 + p_1 x_r + p_2), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ U_{m-1} = \sum u_r(x_r^{m-1} + p_1 x_r^{m-2} + \cdots p_{m-1}), \end{cases}$$

die wir auch schreiben können:

$$5b) \quad \begin{cases} U_0 = q_0, \\ U_1 = q_1 + p_1 \cdot q_0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ U_{m-1} = q_{m-1} + p_1 \cdot q_{m-2} + \cdots p_{m-1} \cdot q_0. \end{cases}$$

Dieselben können nach unseren letzten Darlegungen als bekannt angesehen werden. Wir können dann das Gleichungssystem auffassen als ein lineares mit den Unbekannten $u_1, u_2, \ldots u_m$. Die Auflösung ergiebt die Werthe:

$$6) \qquad u_r = \frac{U_0 \cdot x_r^{m-1} + U_1 \cdot x_r^{m-2} + \cdots U_{m-1}}{f'(x_r)},$$

sodass die Grössen u_r als bekannt angesehen werden können.

Es ist übrigens nicht schwer, die Grössen u_r durch die Grössen p und x_r allein auszudrücken — abgesehen von den Coefficienten der Differentialgleichung. Wir deuten das nur kurz an und nehmen der Einfachheit halber c_2 als ungerades Vielfaches von $sn\beta$ an. Setzen wir dann in der Differentialgleichung der Reihe nach:

$$u = -\alpha, \quad u = -\alpha_2, \ldots u = -\alpha_m$$

so ergiebt sich das folgende Gleichungssystem:

$$7) \quad \begin{cases} \delta_r \,.\, c_1 + c_2 k^2 (x_r \,.\, cn\beta \,.\, dn\beta - u_r \,.\, sn\beta) \\ = 2\delta_r \left(\frac{u_r + u_1}{x_r - x_1} + \cdots \frac{u_r + u_m}{x_r - x_m} \right), \quad r = 1, 2, \ldots m. \end{cases}$$

In diesem Gleichungssystem ist gesetzt worden:

$$\delta_r = 1 - k^2 sn^2\beta \,.\, x_r.$$

Wir können dasselbe auch schreiben:

$$8) \quad \begin{cases} \left(c_1 - c_2 \frac{cn\beta \,.\, dn\beta}{sn^2\beta} \right) + \frac{c_2}{\delta_r} \frac{cn\beta \,.\, dn\beta}{sn^2\beta} - \frac{c_2 \,.\, k^2 \,.\, sn\beta \,.\, u_r}{\delta_r} \\ = -\, 2k^2 sn^2\beta \left(\frac{u_r + u_1}{\delta_r - \delta_1} + \cdots \frac{u_r + u_m}{\delta_r - \delta_m} \right). \end{cases}$$

Multipliciren wir die Gleichungen der Reihe nach mit

$$\delta_1{}^l, \; \delta_2{}^l \ldots \delta_m{}^l$$

und addiren, so erhalten wir:

$$9) \; k^2 sn\beta [2(m-l) - c_2] \sum u_r \,.\, \delta_r{}^{l-1} + \sigma_1 \sum u_r \,.\, \delta_r{}^{l-2} + \cdots \sigma_{l-1} \sum u_r = -R_l,$$

$$R_l = \left(c_1 - c_2 \frac{cn\beta \,.\, dn\beta}{sn^2\beta} \right) \sigma_l + c_2 \frac{cn\beta \, dn\beta}{sn^2\beta} \sigma_{l-1},$$

wobei die Grössen σ_l die l^{ten} Potenzsummen der Grössen δ_r bedeuten, also unmittelbar durch die Grössen p darstellbar sind. Setzen wir an Stelle von l der Reihe nach $0, 1, \ldots m-1$, so stellt unser System ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $u_1, u_2, \ldots u_m$ dar, aus welchem die letzteren nach bekannten Regeln bestimmt werden können.

Damit sind wir am Ziele, die beiden doppeltperiodischen Integrale sind wirklich gefunden worden. Zu bemerken ist, dass wir uns hierbei die Integrale wiederum in der Productform dargestellt gedacht haben. Der Uebergang zur Summendarstellung kann analog wie bei der Lamé'schen Differentialgleichung vorgenommen werden.

§ 45.

Theorie der allgemeinen Picard'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir gehen jetzt zu der Theorie der Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung über, welche beliebig viele singuläre Punkte haben. Den Punkt $u = iK'$ nehmen wir als wirklich sin-

gulären Punkt an, die übrigen als scheinbar singuläre. Die Zahl derselben sei gleich r. Die Betrachtung dieser allgemeinen Gleichung ist in vielen Punkten so analog der früher angestellten, dass wir sie ganz kurz fassen.

Wir können die allgemeinste Picard'sche Differentialgleichung der genannten Art in die Form bringen:

$$1) \quad \frac{d^2y}{du^2} + p_1 \cdot \frac{dy}{du} = p_2 \cdot y,$$

$$p_1 = c_1 + k^2 \sum_{l=1}^{l=r} c_{l+1} \, . \, sn\beta_l \, . \, sn(u + \beta_l)\, snu,$$

$$p_2 = c_{r+2} + \sum_{l=1}^{l=r} c_{r+l+2} \, . \, sn\beta_l \, . \, sn(u+\beta_l)\, snu + c_{2r+3} \, . \, sn^2 u.$$

Bilden wir die determinirenden Gleichungen für die singulären Punkte, nehmen hinzu, dass die Wurzeln aller dieser Gleichungen ganze Zahlen sein müssen, daneben die Wurzeln der determinirenden Gleichungen, die zu den Punkten $u = -\beta_l + iK'$ gehören, positive Zahlen incl. der Null, so folgt, dass die Grössen:

$$c_2, c_3, \ldots c_{r+1}$$

positive ganze Zahlen — incl. der Null — sein müssen, deren Summe kleiner oder gleich $2m$ ist, wenn die Annahme gemacht ist, dass die Integrale die Form haben:

$$2) \quad \frac{\vartheta_1(v + a_1)\,\vartheta_1(v + a_2) \ldots \vartheta_1(v + a_m)}{\vartheta_0^{\,m}(v)} \, e^{-\Sigma \frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v + \lambda u}.$$

Wir können in gewissen Fällen das Problem noch weiter reduciren. Wir setzen dazu:

$$3) \quad y = z \, . \, \psi^{m_1}(u),$$

$$4) \quad \psi(u) = \frac{\vartheta_0(v + b_1)}{\vartheta_0(v)} \, e^{-\frac{\vartheta'_1(b_1)}{\vartheta_1(b_1)} v},$$

so geht die Differentialgleichung über in:

$$5) \quad \frac{d^2 z}{du^2} + P_1 \frac{dz}{du} = P_2 \, . \, z,$$

wobei die Beziehung stattfindet:

$$6) \quad P_1 = -2m\left(\frac{cn\beta_1 \, . \, dn\beta_1}{sn\beta_1} + k^2 sn\beta_1 \, . \, snu \, . \, sn(u + \beta_1)\right) + p_1$$

und P_2 ähnlich darzustellen ist. Die Darstellung von P_1 kann geschrieben werden:

$$\left\{\begin{aligned} P_1 = c_1 - \frac{2m\, cn\beta_1 . dn\beta_1}{sn\beta_1} + (c_2 - 2m)k^2 . sn\beta_1 . snu . sn(u + \beta_1) \\ + \sum_{l=2}^{l=m} c_{l+1} . k^2 . snu . sn\beta_l . sn(u + \beta_l). \end{aligned}\right.$$

Denken wir uns in diesem Ausdruck an Stelle von u eingeführt:

$$u_1 = u + \beta_1,$$

so nimmt derselbe die Form an:

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} P_1 = c'_1 - c'_2 . k^2 . sn\beta_1 . sn(u_1 - \beta_1) snu_1 \\ + \sum_2^r c_{l+1} . k^2 . sn(u_1 - \beta_1) sn\beta_l . sn(u_1 + \beta_l - \beta_1), \end{aligned}\right.$$

$$c'_1 = c_1 - \frac{2m . cn\beta_1 . dn\beta_1}{sn\beta_1}, \quad c'_2 = -c_2 + 2m.$$

Wir können die rechte Seite aber auch in die Form bringen:

$$C_1 - C_2 . k^2 . sn\beta_1 . snu_1 . sn(u_1 - \beta_1)$$
$$+ \sum_2^r C_{l+1} . k^2 . snu_1 . sn(\beta_l - \beta_1) sn(u_1 + \beta_l - \beta_1).$$

Entwickeln wir um den Punkt:

$$u_1 = -\beta_l + \beta_1 + iK',$$

so folgt:

$$8)\qquad C_{l+1} = c_{l+1};$$

entwickeln wir um den Punkt:

$$u_1 = \beta_1 + iK',$$

so folgt:

$$9)\qquad \left\{\begin{aligned} c'_2 - \sum_2^r c_{l+1} = C_2 = 2m - \sum_1^r c_{l+1}. \\ \sum_1^r C_{l+1} = 2m - c_2. \end{aligned}\right.$$

In ähnlicher Weise kann mit den andern scheinbar singulären Punkten verfahren werden.

Ist daher eine der Grössen $c_2, c_3, \ldots c_r, c_{r+1}$ grösser als m in der ursprünglichen Differentialgleichung, so können wir die letztere auf eine andere reduciren, bei welcher

$$\sum c_{l+1}$$

gleich oder kleiner als m ist. Alle derartigen Differentialgleichungen können dann analog wie die im vorigen Paragraphen behandelten aufgelöst werden. Schwierigkeiten in der Auflösung treten also nur in denjenigen Fällen auf, in welchen die Grössen c kleiner als m sind,

ihre Summe dagegen grösser als m. Es möge auf dieselben nicht eingegangen werden. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Integrale gebrochene transcendente Functionen sind. Die Bedingungen sind nach dem früheren leicht aufzustellen — es bleibt nur eine Constante willkürlich.

Endlich möge Folgendes bemerkt werden. Wir haben angenommen, dass die Integrale ihren Unendlichkeitspunkt beide von derselben Ordnung haben. Der Fall, dass die Ordnungszahlen von einander verschieden sind, ist zwar von grossem Interesse, führt aber zu keinen principiell neuen Resultaten und soll hier nicht besonders behandelt werden.

§ 46.

Integration der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei singulären Punkten für den Fall $m = 1$.

Ehe wir zu den Differentialgleichungen dritter Ordnung übergehen, wollen wir noch ein Beispiel für die im vorigen Paragraphen behandelten allgemeineren Differentialgleichungen bringen, indem wir drei singuläre Punkte voraussetzen, ferner $m = 1$ nehmen. Die in Frage stehenden Differentialgleichungen lauten dann:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{du^2} + [c_1 + c_2 . k^2 . sn\beta_1 . snu . sn(u + \beta_1) \\ \qquad + c_3 . k^2 . sn\beta_2 . snu . sn(u + \beta_2)] \dfrac{dy}{du} = y . p_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = c_4 + c_5 . k^2 . sn^2 u + c_6 . k^2 . sn\beta_1 . snu . sn(u + \beta_1) \\ \qquad + c_7 . k^2 . sn\beta_2 . snu . sn(u + \beta_2). \end{cases}$$

Es fragt sich, wann haben die beiden Integrale derselben die Form:

$$2)\quad \varphi(u) = \frac{\vartheta_1(v + a)}{\vartheta_0(v)} e^{\lambda u - \frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v}.$$

Aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen folgt dann, dass wir nur dann zu neuen Resultaten kommen können, wenn:

$$3)\quad c_2 = c_3 = 1$$

gesetzt wird. Diese Annahme machen wir. Es folgt dann unmittelbar:

$$4)\quad c_5 = 2 - c_2 - c_3 = 0.$$

Setzen wir:

$$5)\quad y = e^{\lambda u} . z,$$

so leistet z der Differentialgleichung Genüge:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 z}{du^2} + [c'_1 + k^2 . sn\beta_1 . snu . sn(u+\beta_1) \\ \qquad + k^2 . sn\beta_2 . snu . sn(u+\beta_2)] \dfrac{dz}{du} = z . p'_2 . \end{cases}$$

$$p'_2 = c'_4 + c'_6 . k^2 . sn\beta_1 . sn(u+\beta_1) + c'_7 . k^2 . sn\beta_2 . sn(u+\beta_2),$$

wobei gesetzt ist:

$$7)\quad c'_1 = c_1 + 2\lambda,\quad c'_4 = c_4 - \lambda^2 - \lambda . c_1,\quad c'_6 = c_6 - \lambda,\quad c'_7 = c_7 - \lambda.$$

Ueber λ verfügen wir so, dass c_1 der Null gleich wird.

Entwickeln wir um den Punkt $u = iK'$ und vergleichen die Coefficienten von ε^{-2} und ε^{-1}, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$8)\quad \frac{cn\beta_1 . dn\beta_1}{sn\beta_1} + \frac{cn\beta_2 . dn\beta_2}{sn\beta_2} - c_6 - c_7 = 0.$$

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{sn^2\beta_1} + \dfrac{1}{sn^2\beta_2} + k^2 . sn^2\alpha - 1 - k^2 = - c'_4 \\ \qquad + \dfrac{c'_6 . cn\beta_1 . dn\beta_1}{sn\beta_1} + \dfrac{c'_7 . cn\beta_2 . dn\beta_2}{sn\beta_2} . \end{cases}$$

Die Entwickelung um die Punkte

$$u = -\beta_1 + iK',\quad u = -\beta_2 + iK'$$

ergiebt zunächst durch Vergleichung der Coefficienten von ε^{-1} die beiden Gleichungen:

$$10)\quad sn\beta_1 . c'_6 = cn\beta_1 . dn\beta_1 + k^2 . sn^2\beta_1 . sn\alpha . sn(\alpha - \beta_1),$$

$$11)\quad sn\beta_2 . c'_7 = cn\beta_2 . dn\beta_2 + k^2 . sn^2\beta_2 . sn\alpha . sn(\alpha - \beta_2).$$

Vergleichen wir die constanten Glieder, so folgt:

$$12)\quad c_6^2 - c_4 = \frac{(c_6 - c_7) sn\beta_2}{sn\beta_1 . sn(\beta_2 - \beta_1)},$$

$$13)\quad c_7^2 - c_4 = \frac{(c_7 - c_6) sn\beta_1}{sn\beta_2 . sn(\beta_1 - \beta_2)}.$$

Die beiden Gleichungen sind nicht unabhängig von einander, die eine folgt mit Hülfe der Gleichung:

$$\frac{cn\beta_1 . dn\beta_1}{sn\beta_1} + \frac{cn\beta_2 . dn\beta_2}{sn\beta_2} = c_6 + c_7$$

aus der andern.

Hieraus ergiebt sich:

$$14)\quad \left(c_6 + \frac{sn\beta_2}{sn\beta_1 . sn(\beta_1 - \beta_2)}\right)^2 - \frac{1}{sn^2(\beta_1 - \beta_2)} - c_4 = 0,$$

$$15)\quad \left(c_7 + \frac{sn\beta_1}{sn\beta_2 . sn(\beta_2 - \beta_1)}\right)^2 - \frac{1}{sn^2(\beta_1 - \beta_2)} - c_4 = 0.$$

Damit sind alle Constanten durch eine unter ihnen, durch die Grösse c_4 bestimmt und zu gleicher Zeit die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Differentialgleichung zwei Lösungen der vorgeschriebenen Form besitzt.

Es hat nun keine Schwierigkeit, die beiden Integrale zu finden. Dazu müssen die Grössen λ und α bestimmt werden. Aus den aufgestellten Gleichungen folgt:

$$16)\quad -2\lambda = k^2 . sn\beta_1 . sn\alpha . sn(\alpha-\beta_1) + k^2 . sn\beta_2 . sn\alpha . sn(\alpha-\beta_2),$$

so dass λ bestimmt ist, sobald α gefunden ist.

Ferner folgt:

$$17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{cn\beta_1 . dn\beta_1}{sn\beta_1} - \dfrac{cn\beta_2 . dn\beta_2}{sn\beta_2} \\ + k^2[sn\beta_1 . sn\alpha . sn(\alpha-\beta_1) - sn\beta_2 . sn\alpha . sn(\alpha-\beta_2)] = c_6 - c_7. \end{array} \right.$$

Wir setzen nun:

$$18)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \omega + \frac{\beta_1+\beta_2}{2}, \\ \alpha - \beta_1 &= \omega - \frac{\beta_1-\beta_2}{2}, \\ \alpha - \beta_2 &= \omega + \frac{\beta_1-\beta_2}{2}, \\ \alpha - \beta_1 - \beta_2 &= \omega - \frac{\beta_1+\beta_2}{2}. \end{aligned} \right.$$

Dann nimmt der Factor von k^2 in unserer Gleichung die Form an:

$$sn(\beta_1-\beta_2) sn\left(\omega - \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right) sn\left(\omega + \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right) N,$$

$$N = 1 - k^2 . sn\beta_1 . sn\beta_2 . sn\left(\omega - \frac{\beta_1-\beta_2}{2}\right) sn\left(\omega + \frac{\beta_1-\beta_2}{2}\right).$$

Erwägen wir die Beziehung:

$$sn(v+w) sn(v-w) = \frac{sn^2 v - sn^2 w}{1 - k^2 sn^2 v . sn^2 w}$$

und setzen:

$$\beta_1 + \beta_2 = 2\beta'_1, \quad \beta_1 - \beta_2 = 2\beta'_2,$$

so wird der Ausdruck:

$$sn 2\beta'_2 \frac{sn^2\omega - sn^2\beta'_1}{1 - k^2 . sn^2\omega_1 . sn^2\beta'_1} N,$$

$$N = 1 - k^2 \frac{(sn^2\beta'_1 - sn^2\beta'_2)(sn^2\omega - sn^2\beta'_2)}{(1 - k^2 . sn^2\omega . sn^2\beta'_2)(1 - k^2 . sn^2\beta'_1 . sn^2\beta'_2)}.$$

Ebenso einfach folgt:

$$\frac{cn\beta_1\,dn\beta_1}{sn\beta_1} - \frac{cn\beta_2\,dn\beta_2}{sn\beta_2} = \frac{(1-k^2sn^4\beta'_1)(1-k^2sn^4\beta'_2)sn2\beta'_2}{(1-k^2sn^2\beta'_1sn^2\beta'_2)(sn^2\beta'_1-sn^2\beta'_2)}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir für $sn^2\omega$ die Gleichung:

$$19)\qquad \frac{sn^2\beta'_2(1-k^2sn^4\beta'_2)}{sn^2\beta'_1-sn^2\beta'_2}\;\frac{1-k^2.sn^2\omega.sn^2\beta'_1}{1-k^2.sn^2\omega.sn^2\beta'_2} = c_6 - c_7.$$

Damit sind wir vollkommen am Ziel. Aus der Gleichung, die wir soeben aufgestellt haben, ergiebt sich $sn^2\omega$ in eindeutiger Weise, also erhalten wir zwei Werthe von ω, die sich durch das Vorzeichen von einander unterscheiden. Die entsprechenden Werthe von α lauten:

$$20)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \quad\;\, \omega + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}, \\[2ex] \alpha_2 = -\omega + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}, \end{cases}$$

sodass α_1 und α_2 bestimmt sind. Also ergiebt sich der

Lehrsatz: Als Typus der in der Ueberschrift charakterisirten Gleichungen können wir die Differentialgleichung ansehen:

$$\frac{d^2y}{du^2} + [k^2sn\beta_1\,snu\,sn(u+\beta_1) + k^2sn\beta_2\,snu\,sn(u+\beta_2)]\,\frac{dy}{du} = y\,p_2.$$

$$p_1 = c_4 + c_6\,k^2sn\beta_1\,snu\,sn(u+\beta_1) + c_7\,k^2sn\beta_2\,snu\,sn(u+\beta_2),$$

wobei c_4 willkürlich ist und c_6 und c_7 in einfacher Weise von c_4 abhängen. Die beiden Integrale können nach einfachen Regeln bestimmt werden.

§ 47.[9])

Untersuchung aller Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Coefficienten einen singulären Punkt besitzen.

Wir wenden uns nunmehr zu der Theorie der Differentialgleichungen dritter Ordnung, bemerken aber, dass dieselbe nicht so ausführlich behandelt werden soll, wie die Theorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir nehmen zuerst diejenigen Differentialgleichungen, deren Coefficienten einen singulären Punkt besitzen und zwar den Punkt $u = iK'$, wir nehmen ferner an, dass die Integrale die Form haben:

$$1)\qquad \prod_1^m \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)}\cdot e^{\lambda u - \Sigma \frac{\vartheta'_0(a_r)}{\vartheta_0(a_r)} v},$$

so zwar, dass der Unendlichkeitspunkt bei ihnen von der Ordnungszahl m ist.

Die in Frage stehenden Differentialgleichungen können dann alle in die Form gebracht werden:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^3y}{du^3} + (c_1 + c_2 . k^2 . sn^2 u)\dfrac{dy}{du} \\ \qquad = y(c_3 + c_4 . k^2 . sn^2 u + c_5 . k^2 . snu . cnu . dnu). \end{cases}$$

Wir setzen wie früher:

$$3)\qquad y = z e^{\lambda u},$$

so leistet z der Gleichung Genüge:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^3z}{du^3} + 3\lambda\dfrac{d^2z}{du^2} + (c'_1 + c'_2 . k^2 . sn^2 u)\dfrac{dz}{du} \\ \qquad = z(c'_3 + c'_4\ k^2 . sn^2 u + c'_5 . k^2 . snu . cnu . dnu), \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} c'_1 &= c_1 + 3\lambda, \\ c'_2 &= c_2, \\ c'_3 &= c_3 - \lambda^3 - \lambda c_1, \\ c'_4 &= c_4 - \lambda c_2, \\ c'_5 &= c_5. \end{aligned}$$

Die Bedingungsgleichungen, welche die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen für die Auflösung des Problems, sowie die Auflösung selbst ergeben, erhalten wir, indem wir beide Seiten der Differentialgleichung nach Potenzen von $u - iK'$ entwickeln und die Coefficienten gleich hoher Potenzen bis zu einer bestimmten Potenz einander gleich setzen.

Die Vergleichung der Coefficienten der beiden niedrigsten Potenzen ergiebt die Gleichungen:

$$5)\qquad c_5 = m(m+1)(m+2) + mc_2.$$

$$6)\qquad 3m(m+1)\lambda = c_4 - c_2\lambda.$$

Wir haben nun die Fälle zu unterscheiden, ob die drei Werthe von λ, die zu den drei Integralen gehören, einander gleich sind oder nicht. Im letzteren Falle muss der Coefficient von λ auf der linken Seite der letzten Gleichung gleich dem Coefficienten von λ auf der rechten Seite sein, oder also es folgt:

$$7)\quad \begin{cases} c_2 = -3m(m+1), \\ c_4 = 0, \\ c_5 = -2m(m^2-1). \end{cases}$$

Somit erhalten wir den

Lehrsatz: Alle Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Coefficienten nur einen singulären Punkt haben,

während die Integrale die angegebene Form besitzen, lauten bei ungleichen Werthen von λ:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^3y}{du^3} + [c_1 - 3m(m+1)k^2 . sn^2u]\frac{dy}{du} \\ &\qquad = y[c_3 - 2m(m^2-1)k^2 . snu . cnu . dnu]. \end{aligned}\right.$$

Der Fall der gleichen λ ist analog wie früher zu behandeln, sodass wir uns kürzer fassen können.

Die Vergleichung der Coefficienten der drei folgenden Potenzen ergiebt die Gleichungen 8):

$$-2(3m^2 + c_2)K_2 + m(c_1 + 3\lambda^2) + \frac{m(1+k^2)}{3} c_2 = 0,$$

$$3(3m^2 - 3m + 2 + c_2)K_3 = c'_3 - 3\lambda(m-2)(m-1) + c'_4\left(\frac{1+k^2}{3} + K_2\right),$$

$$4(3m^2 - 6m + 6 + c_2)K_4 = a_1 . K_3 + a_2 . K_2 + a_3,$$

$$a_1 = c'_4 - 3\lambda(m-3)(m-2),$$

$$a_2 = (m-2)\left(c'_1 + c_2\frac{1+k^2}{3}\right),$$

$$a_3 = \frac{1-k^2+k^4}{15}(c_5 + mc_2).$$

In ähnlicher Weise geht es weiter. Jede folgende Gleichung bestimmt eine weitere der Grössen K und zwar wird der Factor des allgemeinen Gliedes:

$$(l+m)[c_2 + l^2 - lm + m^2 - 3(l-m) + 2].$$

Schliessen wir genau so wie in den früheren Paragraphen, so folgt der

Lehrsatz: Alle Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Coefficienten einen singulären Punkt, den Punkt $u = iK'$ besitzen, während die Integrale die vorgeschriebene Form besitzen, lauten:

$$\frac{d^3y}{du^3} + (c_1 + c_2 k^2 sn^2u)\frac{dy}{du} = yp_2,$$

$$p_2 = c_3 + c_4 . k^2 . sn^2u + c_5 . k^2 . snu . cnu . dnu.$$

Dabei bestehen die Beziehungen:

$$c_2 = -l^2 + lm - m^2 + 3(l-m) - 2,$$

$$c_5 = m(m+1)(m+2) + mc_2,$$

$$[c_2 + 3m(m+1)]\lambda = c_4,$$

wobei l die Werthe annehmen kann: $-m+2, -m+3, \ldots 0, 1, \ldots m,$ mit Ausnahme von $\frac{m+3}{2}$.

Die Zahl der in Betracht kommenden Werthe von l kann noch verringert werden — indessen ist das unwesentlich. Die aufgestellten Bedingungen sind nothwendige.

§ 48.

Untersuchung des Falles $m = 1$.

Wir nehmen jetzt zunächst den Fall $m = 1$. Für denselben erhalten wir durch Specialisirung der Formeln des vorigen Paragraphen als hinreichende und nothwendige Bedingungen die Gleichungen:

1) $c_5 = 6 + c_2,$

2) $6\lambda = c_4 - c_2 . \lambda,$

3) $2(3 + c_2) K_2 = c_1 + 3\lambda^2 + \frac{1+k^2}{3} c_2,$

4) $(6 + 3c_2) K_3 = c_3 - \lambda^3 - \lambda c_1 + \frac{1+k^2}{3}(c_4 - c_2\lambda) + (c_4 - c_2\lambda) K_2,$

wobei gesetzt ist:

$$K_2 = -\frac{k^2 sn^2\alpha}{2} + \frac{1+k^2}{6},$$

$$K_3 = -\frac{k^2 sn\alpha . cn\alpha . dn\alpha}{3}.$$

Für den Fall der gleichen Werthe von λ ergiebt sich vermöge der Betrachtungen des vorigen Paragraphen der einzige Werth $c_2 = -3$, mithin werden die Gleichungen:

$$c_2 = -3,$$
$$c_4 = 3\lambda,$$
$$c_5 = 3,$$
$$c_1 = -3\lambda^2 + (1 + k^2),$$
$$k^2 . u = c_3 - 3k^2\lambda x + 2\lambda^3 + 2(1 + k^2)\lambda.$$

In der letzten Formel ist wie früher gesetzt worden:

$$x = sn^2\alpha, \quad u = sn\alpha . cn\alpha . dn\alpha.$$

Diese Resultate sind zuerst von Mittag-Leffler aufgestellt worden. Wir erhalten den

Lehrsatz: Als erster möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + (c_1 - 3k^2 sn^2 u)\frac{dy}{du} = y(c_3 + c_4 k^2 sn^2 u + 3k^2 . snu . cnu . dnu).$$

In derselben sind die beiden Constanten c_3 und c_4 willkürlich, c_1, λ, α aus den vorhin aufgestellten Gleichungen bestimmt.

Aehnlich ist der Fall der von einander verschiedenen Werthe von λ zu erledigen. Es ergeben sich für denselben die Gleichungen:

$$c_2 = -6, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0,$$
$$3(\lambda^2 - k^2 x) + c_1 - (1 + k^2) = 0,$$
$$4k^2 u - c_3 + \lambda^3 + \lambda[c_1 + 3k^2 x - 3(1 + k^2)] = 0.$$

Die Elimination von λ zwischen diesen Gleichungen ergiebt:

5) $$Mx + N - 8c_3 k^2 u - c_3 = 0,$$

wobei gesetzt ist:

$$M = 16k^4[3k^2c^2 - 2(1 + k^2)c + 1],$$
$$N = 16k^4c^2(1 + k^2 - 2k^2c^2),$$
$$c_1 = 4(1 + k^2) - 6k^2c.$$

Damit sind wir, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht, am Ziele. Die Resultate sind zuerst von Picard aufgestellt worden. Wir erhalten den

Lehrsatz: Als zweiter möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + (c_1 - 6k^2 sn^2 u)\frac{dy}{du} = yc_3.$$

c_1 und c_3 sind willkürlich, die Integrale ergeben sich aus den vorhin aufgestellten Gleichungen.

§ 49.

Untersuchung des Falles $m = 2$ für gleiche Werthe von λ.

Im Falle $m = 2$ gestalten sich die im vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen folgendermassen:

1) $$c_5 = 24 + 2c_2,$$
2) $$18\lambda = c_4 - c_2\lambda,$$
3) $$(12 + c_2)k^2 s_1 + 2c_1 + 6\lambda^2 - 8(1 + k^2) = 0,$$
4) $$-(8 + c_2)k^2 u = c_3 - \lambda^3 - \lambda c_1 + 12\lambda(1 + k^2) - 9\lambda s_1 k^2$$
$$u = u_1 + u_2,$$
5) $$(6 + c_2)k^2(x_1 - x_2)^2 - 12\lambda u = 0.$$

Die beiden Gleichungen 3) und 5) können auch durch zwei andere ersetzt werden, die wir erhalten, wenn wir $u = -\alpha_1$, $u = -\alpha_2$ setzen, durch die Gleichungen nämlich:

6) $$3k^2 s_1 - 4(1 + k^2) + c_1 + (6 + c_2)k^2 x_1 + 3\lambda^2 + 6\lambda g = 0,$$
7) $$3k^2 s_1 - 4(1 + k^2) + c_1 + (6 + c_2)k^2 x_2 + 3\lambda^2 - 6\lambda g = 0,$$
$$g = \frac{u_1 + u_2}{x_2 - x_1}.$$

Setzen wir gleiche Werthe von λ voraus, so sind nach unserem allgemeinen Lehrsatz nur drei Werthe von c_2 möglich, nämlich die Werthe:

$$-6, \quad -8, \quad -12.$$

Wir nehmen zunächst den Fall:

$$c_2 = -6.$$

In ihm nehmen die Gleichungen 1) bis 5) die Gestalt an:

$$c_2 = -6, \quad c_4 = 12\lambda, \quad c_5 = 12,$$
$$6k^2 s_1 + 2c_1 + 6\lambda^2 - 8(1+k^2) = 0,$$
$$-2k^2 u = c_3 - \lambda^3 - \lambda c_1 + 12\lambda(1+k^2) - 9\lambda s_1 k^2,$$
$$\lambda u = 0.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass zwei Unterfälle möglich sind. Entweder kann sein:

$$u_1 + u_2 = 0$$

oder aber $\lambda = 0$. Wir nehmen zunächst den ersten Fall. In ihm nimmt die vorletzte Gleichung die Gestalt an:

$$0 = c_3 - \lambda^3 - \lambda c_1 + 12\lambda(1+k^2) - 9\lambda s_1 . k^2$$

und es ergiebt die Elimination von s_1 aus ihr und der vorangehenden die Coefficientenbeziehung:

$$8) \qquad \frac{c_1 . c_4}{3} + \frac{c_4^{\,3}}{9.12} + 2c_3 = 0.$$

Wir können demnach die Coefficienten c_1 und c_4 als willkürlich ansehen. Die Gleichung:

$$u_1 + u_2 = 0$$

ergiebt die weitere:

$$u_1^{\,2} - u_2^{\,2} = 0,$$

oder auch:

$$9) \qquad (x_1 - x_2)[1 - (1+k^2)s_1 + k^2(s_1^{\,2} - x_1 x_2)] = 0.$$

Als erste Lösung erhalten wir:

$$x_1 = x_2 = \frac{s_1}{2} = \frac{4(1+k^2) - 3\lambda^2 - c_1}{6k^2}.$$

Es ist also x_1 und x_2 eindeutig bestimmt, die dazu gehörenden Argumente dagegen doppeldeutig. Nennen wir einen der zu x_1 gehörenden Werthe α_1, so ist der andere $-\alpha_1$ und das dazu gehörende Integral lautet, wenn wir Thetafunctionen einführen:

$$\frac{\vartheta_1(v+\alpha_1)\vartheta_1(v-\alpha_1)}{\vartheta_0^{\,2}(v)} e^{\lambda . u}.$$

Die beiden andern Integrale ergeben sich mit Hülfe einer quadratischen Gleichung. In der That, s_1 ist eindeutig bestimmt, $x_1 . x_2$ auch, also sind x_1 und x_2 aus einer quadratischen Gleichung bestimmt. Wir

wollen die beiden zu x_1 gehörenden Argumente durch a'_1 und $-a'_1$ bezeichnen, so sind die entsprechenden Argumente von x_2 eindeutig bestimmt. Bezeichnen wir sie durch a'_2 und $-a'_2$, so lauten die beiden noch fehlenden Integrale:

$$\frac{\vartheta_1(v + a'_1)\,\vartheta_1(v + a'_2)}{\vartheta_0^2(v)}\, e^{-\Sigma \frac{\vartheta'_0(a'_s)}{\vartheta_0(a_s)} v + \lambda . u},$$

$$\frac{\vartheta_1(v - a'_1)\,\vartheta_1(v - a'_2)}{\vartheta_0^2(v)}\, e^{\Sigma \frac{\vartheta'_0(a'_s)}{\vartheta_0(a_s)} v + \lambda . u}.$$

Damit ist Alles gemacht und wir finden den

Lehrsatz: Als erster möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + (c_1 - 6k^2 sn^2 u)\frac{dy}{du} = p_2 . y,$$

$$p_2 = c_3 + c_4 . k^2 . sn^2 u + 12k^2 . snu . cnu . dnu,$$

wobei die Relationen stattfinden:

$$c_3 = -2c_1\lambda - 8\lambda^3, \quad 12\lambda = c_4,$$

c_1 und c_4 bleiben willkürlich.

Wir nehmen jetzt zweitens an, dass $\lambda = 0$ sei. Dann erhalten die fundamentalen Gleichungen die Form:

$$c_2 = -6, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 12,$$

$$6k^2 s_1 + 2c_1 - 8(1 + k^2) = 0,$$

$$u = -\frac{c_3}{2k^2} = c'_3,$$

wie wir es der Einfachheit wegen bezeichnen wollen. Die vorletzte Gleichung bestimmt s_1 eindeutig. Die letzte Gleichung wird am einfachsten behandelt, wenn wir eine neue Veränderliche y durch die Gleichungen einführen:

$$10) \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{s_1}{2} + y, \\ x_2 = \frac{s_1}{2} - y. \end{cases}$$

Es folgen dann die Relationen:

$$11) \qquad u_1^2 = \frac{\varphi(s_1)}{2} + \varphi'(s_1)y + \varphi''(s_1)y^2 + k^2y^3,$$

$$12) \qquad u_2^2 = \frac{\varphi(s_1)}{2} - \varphi'(s_1)y + \varphi''(s_1)y^2 - k^2y^3,$$

wobei gesetzt ist:

$$\varphi(s_1) = s_1 - (1 + k^2)\frac{s_1^2}{2} + \frac{k^2 s_1^3}{4},$$

mithin ergiebt sich aus der Gleichung:

$$u_1 = -u_2 + c'_3$$

durch Quadriren:

13) $$2y[\varphi'(s_1) + k^2 y^2] = c'^2_3 - 2c'_3 . u_2.$$

Diese Gleichung drückt u_2 eindeutig durch y oder, was dasselbe sagt, durch x_1 und x_2 aus — von dem Falle $c'_3 = 0$ sehen wir ab. Eine analoge Gleichung kann für u_1 gefunden werden. Durch nochmaliges Quadriren ergiebt sich die Gleichung:

14) $$c'^4_3 + 4y^2[\varphi'(s_1) + k^2 y^2]^2 = 2c'^2_3[\varphi(s_1) + 2\varphi''(s_1)y^2].$$

Es ist dies eine cubische Gleichung mit der Unbekannten y^2. Wir erhalten also drei Werthsysteme:

$$\pm y, \quad \pm y', \quad \pm y''.$$

Diesen drei Systemen entsprechen dann drei Systeme:

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, \\ x'_1, & x'_2, \\ x''_1, & x''_2 \end{matrix}$$

in eindeutiger Weise, mithin auch vermöge der vorhin gemachten Bemerkungen über die Grössen u drei Systeme:

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, \\ \alpha''_1, & \alpha''_2, \end{matrix}$$

das heisst, das Problem ist vollkommen gelöst. Unter solchen Umständen finden wir den

Lehrsatz: Als zweiter möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + (c_1 - 6k^2 sn^2 u)\frac{dy}{du} = y(c_3 + 12k^2 sn\, u\, cn\, u\, dn\, u),$$

wobei c_1 und c_3 willkürliche Constanten bedeuten.

Wir nehmen nunmehr den weiteren Fall $c_2 = -8$. In ihm gestalten sich die Gleichungen folgendermassen:

$$c_5 = 8, \quad c_4 = 10\lambda,$$

$$4k^2 s_1 + 2c_1 + 6\lambda^2 - 8(1 + k^2) = 0,$$

$$c_3 - \lambda^3 - \lambda c_1 + 12\lambda(1 + k^2) - 9\lambda s_1 k^2 = 0,$$

$$k^2(x_1 - x_2)^2 + 6\lambda(u_1 + u_2) = 0.$$

Die beiden vorletzten Gleichungen ergeben durch Elimination von s_1 die Relation:

$$15)\qquad 2c_3 + 25\lambda^3 + 7c_1\lambda - 12\lambda - 12\lambda(1 + k^2) = 0,$$

sodass wir die beiden Constanten c_1 und c_4 als willkürlich annehmen können. Der letzten Gleichung unseres Systemes wird nun zunächst Genüge geleistet, wenn wir $\lambda = 0$, $x_1 = x_2$ setzen. s_1 ist eindeutig bestimmt, also x_1 auch, also das zu ihm gehörende Argument bis auf das Vorzeichen. Bezeichnen wir es durch $\pm a$, so haben die drei Integrale, von dem bekannten Exponentialfactor abgesehen, die Form:

$$\frac{\vartheta_1(v+a)\vartheta_1(v+a)}{\vartheta_0^2(v)},$$

$$\frac{\vartheta_1(v-a)\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_0^2(v)},$$

$$\frac{\vartheta_1(v+a)\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_0^2(v)},$$

sodass auch in diesem Falle das Problem gelöst ist. Wir erhalten den

Lehrsatz: Als dritter möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + (c_1 - 8k^2sn^2u)\frac{dy}{du} = y\,.\,8k^2 sn\,u\,cn\,u\,dn\,u,$$

in welcher c_1 willkürlich ist.

Im allgemeinen Falle können wir nun genau so operiren, wie im zweiten Falle, wir brauchen uns nur an Stelle von c'_3 gesetzt zu denken:

$$-\frac{k^2(x_1 - x_2)^2}{6\lambda} = \frac{4k^2y^2}{6\lambda}.$$

Wir erhalten dann unter Forthebung des Factors y^2 — wozu wir berechtigt sind — die Gleichung:

$$16)\qquad \frac{4k^8y^6}{81\lambda^4} + [\varphi'(s_1) + k^2y^2]^2 = \frac{2k^4y^4}{9\lambda^2}.$$

Es ist das eine cubische Gleichung mit der Unbekannten y^2, bei welcher wir genau dieselben Schlüsse wie früher ziehen können. Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Als vierter möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + (c_1 - 8k^2sn^2u)\frac{dy}{du} = y(c_3 + c_4\,.\,k^2sn^2u + 8k^2sn\,u\,cn\,u\,dn\,u).$$

In derselben ist c_1 und c_4 willkürlich, während c_3 aus der Gleichung bestimmt ist:

$$2c_3 + 25\lambda^3 + 7c_1\,.\,\lambda - 12\lambda(1 + k^2) = 0.$$

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass der dritte Fall auch als specieller des vierten aufgefasst werden kann. Er ist besonders hervorgehoben worden, weil in ihm die allgemeinen Betrachtungen sich modificiren.

Wir kommen nunmehr zu dem Falle $c_2 = -12$. In ihm gestalten sich die Bedingungen folgendermassen:

$$c_5 = 0, \quad c_4 = 6\lambda,$$
$$c_1 + 3\lambda^2 - 4(1 + k^2) = 0,$$
$$4k^2(u_1 + u_2) = c_3'' - 9\lambda s_1 \,.\, k^2,$$
$$c_3'' = c_3 - \lambda^3 - \lambda c_1 + 12\lambda(1 + k^2),$$
$$k^2(x_1 - x_2)^2 + 2\lambda(u_1 + u_2) = 0.$$

Die Gleichungen erfordern wiederum eine besondere Discussion, wenn $\lambda = 0$ ist. In diesem Falle ist:

$$x_1 = x_2, \quad c_1 = 4(1 + k^2), \quad c_4 = 0,$$
$$u = \frac{c_3}{4k^2},$$

woraus durch Quadriren folgt:

$$u_1 = u_2 = \frac{c_3}{8k^2}.$$

Es sind die Argumente, die zu x_1 und x_2 gehören, also einander gleich. Durch nochmaliges Quadriren erhalten wir eine cubische Gleichung, die das Problem löst. Es ergiebt sich demnach der

Lehrsatz: Als fünfter möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + [4(1 + k^2) - 12k^2 sn^2 u)]\frac{dy}{du} = y \,.\, c_3,$$

in welcher c_3 eine willkürliche Constante bedeutet.

Im allgemeinen Falle müssen wir anders verfahren Die letzte unserer Bedingungsgleichungen können wir schreiben:

$$2k^2y^2 + \lambda u = 0.$$

Die Elimination von u aus ihr und der vorhergehenden ergiebt die Beziehung:

17) $$8k^4y^2 + \lambda(c_3'' - 9\lambda s_1 \,.\, k^2) = 0.$$

Diese Gleichung drückt y^2 linear durch s_1 aus und umgekehrt. Mit der Gleichung:
$$2k^2y^2 + \lambda u = 0$$
verfahren wir nun analog, wie im zweiten Falle, wir haben nur an Stelle von c'_3 zu setzen:
$$-\frac{2k^2y^2}{\lambda}.$$

Nach Fortheben des Factors y^2 ergiebt sich die Relation:

$$18)\qquad \frac{4k^8y^6}{\lambda^4}+[\varphi'(s_1)+k^2y^2]^2=\frac{2k^4y^2}{\lambda^2}[\varphi(s_1)+2\varphi''(s_1)y^2].$$

Nun können wir aber nicht so schliessen, wie in den früheren Fällen, da s_1 nicht mehr eindeutig durch die Coefficienten bestimmt ist, wir müssen vielmehr y^2 vermöge der aufgestellten Relation durch s_1 ersetzen. Es ergiebt sich dann scheinbar eine Gleichung vierten Grades in s_1, indessen überzeugt man sich leicht, dass der Factor von $s_1{}^4$ der Null gleich wird, während der von $s_1{}^3$ von Null verschieden ist, sodass die Gleichung thatsächlich vom dritten Grade ist.

Zu jeder Wurzel ergiebt sich vermöge der Gleichung:

$$8k^4y^2=\lambda(9\lambda s_1.k^2-c_3'')$$

ein eindeutiges Werthsystem x_1, x_2, also wie leicht ersichtlich ein eindeutiges System α_1, α_2. Damit ist alles gemacht und wir erhalten den

Lehrsatz: Als sechster möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3}+(c_1-12k^2sn^2u)\frac{dy}{du}=y(c_3+c_4.k^2sn^2u).$$

In dieser Gleichung sind die Constanten c_3 und c_4 willkürlich, während c_1 aus den Gleichungen bestimmt ist:

$$c_1+3\lambda^2-4(1+k^2)=0,\quad c_4=6\lambda.$$

Wir haben bei unseren Betrachtungen von der Gleichung abgesehen, die durch Vergleichung der constanten Glieder links und rechts entsteht. Es ist das im allgemeinen Fall erlaubt.

§ 50.

Untersuchung des Falles $m=2$ für ungleiche Werthe von λ.

Setzen wir voraus, dass die Werthe von λ von einander verschieden sind, so existirt nur ein Werth von c_2, nämlich $c_2=-18$. Die Bestimmungsgleichungen nehmen die Form an:

$$c_4=0,\quad c_5=-12,$$
$$3k^2s_1=c_1-4(1+k^2)+3\lambda^2,$$
$$10k^2u=c_3-4c_1.\lambda+24\lambda(1+k^2)-10\lambda^3,$$
$$4k^2y^2+\lambda u=0.$$

Durch Elimination von u aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich ferner:

$$40k^4y^2+\lambda c_3-4\lambda^2c_1+24\lambda^2(1+k^2)-10\lambda^4=0.$$

Vermöge dieser Gleichungen sind die Grössen s_1, y^2 und u ganz und rational durch λ ausgedrückt, es bleibt also als einzige Aufgabe übrig, die zu den drei Integralen gehörenden Grössen λ zu bestimmen. Auch hier modificiren sich die Betrachtungen für den Fall $\lambda = 0$, indessen wollen wir hier denselben nicht als besonderen herausgreifen, sondern ihn in den allgemeinen einreihen. Die Grundlage der Betrachtung bildet wiederum die Gleichung:

$$4k^2y^2 + \lambda u = 0.$$

Aus ihr folgt:

$$1) \qquad \frac{64k^8y^6}{\lambda^4} + [\varphi'(s_1) + k^2y^2]^2 = \frac{8k^4y^2}{\lambda^2}[\varphi(s_1) + 2\varphi''(s_1)y^2].$$

Wir bringen die Gleichung zunächst in die Form:

$$\left(S - \frac{4k^4y^2s_1}{\lambda^2}\right)^2 + k^2\left(y^2 - \frac{s_1^{\,2}}{4}\right)F = 0,$$

$$F = 2S + k^2\left(y^2 - \frac{s_1^{\,2}}{4}\right) + 64\frac{k^6y^4}{\lambda^4} + 16\frac{k^2y^2}{\lambda^2}\varphi''(s_1),$$

$$S = 1 - (1 + k^2)s_1 + k^2s_1^{\,2}.$$

Hieraus ergiebt sich die weitere Form:

$$2) \qquad (k^2\lambda + k^2s_1 . d_2)^2 + d_1(2k^2\lambda^2 + d_1 . \lambda^2 + 2d_2 . d_3) = 0,$$

$$d_1 = k^4y^2 - \frac{k^4s_1^{\,2}}{4},$$

$$d_2 = k^2\lambda s_1 - \frac{4k^4y^2}{\lambda} - \lambda(1 + k^2),$$

$$d_3 = k^2\lambda s_1 - \frac{8k^4y^2}{\lambda}.$$

In dieser Gleichung haben wir nun die Grössen y^2 und s_1 durch λ zu ersetzen, dann ergeben sich zunächst die Beziehungen:

$$d_1 = -\frac{1}{36}c_1'^{\,2} - \frac{\lambda c_3}{40} + \frac{\lambda^2}{15}c_1'',$$

$$d_2 = \frac{c_3}{10} + \frac{\lambda}{15}c_1'',$$

$$d_3 = \frac{c_3}{5} + \frac{\lambda}{15}[-7c_1 + 52(1 + k^2)] - \lambda^3,$$

$$c_1' = c_1 - 4(1 + k^2), \quad c_1'' = -c_1 + 1 + k^2.$$

Die resultirende Gleichung in λ scheint vom sechsten Grade zu sein, indessen überzeugt man sich leicht, dass die Factoren von λ^5 und λ^6 der Null gleich sind. Die Gleichung nimmt die Form an:

$$a_0 . \lambda^4 + a_1 . \lambda^3 + a_2 . \lambda^2 + a_3 . \lambda = 0,$$

$$a_0 = \frac{4}{15} k^2 c_1'' + \frac{4}{45 . 15} c_1''^2 [- c_1 + 16 (1 + k^2)] + \frac{c_3^2}{64},$$

$$a_1 = \frac{c_3}{5}\left(\frac{3}{4} k^2 + \frac{2 c_1' . c_1''}{45} + \frac{5 c_1'^2}{144} + \frac{c_1''}{20 . 45} [- 29 c_1 + 164 (1 + k^2)]\right),$$

$$a_2 = \frac{7}{1000} c_3^2 \left[c_1 - 6 (1 + k^2) + \left(k^2 - \frac{c_1'^2}{36}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{c_1' . c_1''}{45}\left(2 k^2 + \frac{c_1'}{18} [c_1 - 10 (1 + k^2)]\right),$$

$$a_3 = \frac{2 c_3 . k^4}{5} \left\{\frac{c_1'}{6 k^2}\left[1 - \frac{c_1'}{6 k^2} (1 + k^2) + \left(\frac{c_1'}{6 k^2}\right)^2 k^2\right] - \frac{c_3^2}{k^4 . 400}\right\}.$$

Das Resultat scheint zunächst nicht unmittelbar zu verwerthen zu sein, da die Gleichung in λ vom vierten Grade ist, während wir eine Gleichung dritten Grades brauchen. Dieser Uebelstand kann aber leicht gehoben werden. In der That, es kann auf der linken Seite der Factor λ fortgehoben werden. Ist nämlich $\lambda = 0$ — und hier tritt nun der vorhin erwähnte Ausnahmefall ein —, so wird auch $a_3 = 0$, sodass die Gleichung nur noch zwei von Null verschiedene Werthe geben kann. Der Beweis hierfür kann leicht erbracht werden. Ist $\lambda = 0$, so folgt aus den aufgestellten Gleichungen:

$$y = 0, \quad x_1 = x_2 = \frac{s_1}{2},$$

$$s_1 = \frac{c_1'}{3 k^2},$$

$$u_1^2 = u_2^2 = \frac{c_3^2}{k^4 . 400} = x_1 - (1 + k^2) x_1^2 + k^2 x_1^3$$

und hieraus ergiebt sich das zu Beweisende unmittelbar. Damit ist der Fall $\lambda = 0$ erledigt. Nehmen wir nun an, dass λ von Null verschieden ist, so können wir von dem Factor λ absehen und erhalten die gesuchte cubische Gleichung. Somit ist Alles gemacht und wir erhalten den

Lehrsatz: Als siebenter möglicher Typus ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^3 y}{d u^3} + (c_1 - 18 k^2 sn^2 u) \frac{d y}{d u} = y (c_3 - 12 k^2 snu . cnu . dnu),$$

in welcher c_1 und c_3 willkürliche Constanten bedeuten.

§ 51.

Untersuchung der Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Integrale einen und denselben m-fachen Unendlichkeitspunkt besitzen, während in den Coefficienten noch ein einfacher weiterer Unendlichkeitspunkt enthalten ist.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter, indem wir nach denjenigen Differentialgleichungen dritter Ordnung fragen, deren Integrale die frühere Form, die aber überdies in den Coefficienten noch den weiteren einfachen Unendlichkeitspunkt

$$u = -\beta + iK'$$

besitzen. Als Form derselben ergiebt sich, wenn wir ähnliche Betrachtungen wie früher anstellen:

$$1)\qquad \frac{d^3y}{du^3} + p_1\frac{d^2y}{du^2} + p_2\frac{dy}{du} = p_3 \cdot y,$$

wobei gesetzt ist:

$$p_1 = c_0 + c_1 . k^2 snu . sn(u+\beta),$$

$$p_2 = c_2 + c_3 . k^2 snu . sn(u+\beta) + c_4 . sn^2 u,$$

$$p_3 = c_5 + c_6 . k^2 snu . sn(u+\beta) + c_7 . k^2 sn^2 u + c_8 . k^4 sn^3 u . sn(u+\beta).$$

Die für die Lösung des Problems nothwendigen Gleichungen erhalten wir durch Entwickelung um die Punkte:

$$u = iK' \quad \text{und} \quad u = -\beta + iK'.$$

Für die erstere erinnern wir an die Formeln:

$$\frac{1}{snu} = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1+k^2}{6}u^2 + \frac{1}{3.5!}(7 - 22k^2 + k^4)u^4 + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{sn^2u} = \frac{1}{u^2}\left(1 + \frac{1+k^2}{3}u^2 + \frac{1}{15}(1 - k^2 + k^4)u^4 + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{sn^3u} = \frac{1}{u^3}\left(1 + \frac{1+k^2}{2}u^2 + \frac{1}{5!}(17 - 2k^2 + 17k^4)u^4 + \cdots\right),$$

ferner an die Entwickelungen:

$$\frac{1}{snu . sn(u+\beta)} = \frac{1}{usn\beta} - \frac{cn\beta . dn\beta}{sn^2\beta} + \alpha_0 . u + \frac{cn\beta . dn\beta}{sn^4\beta}u^2 ..$$

$$\frac{1}{sn^3u . sn(u+\beta)} = \frac{1}{u^3 sn\beta} - \frac{cn\beta . dn\beta}{sn^2\beta}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{sn^3\beta}\frac{1}{u} - \alpha_1 \ldots,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{sn^3\beta} - \frac{1+k^2}{3sn\beta},$$

$$\alpha_1 = \frac{cn\beta . dn\beta}{sn^4\beta}\left(1 + \frac{1+k^2}{3}sn^2\beta\right).$$

Es müssen nun die beiden Fälle durchaus von einander gesondert betrachtet werden, in denen die Werthe von λ einander gleich oder aber von einander verschieden sind. Wir beschränken uns auf den letzteren, behandeln ihn aber viel kürzer als die früheren Fälle in den vorangehenden Paragraphen. Wir können in ihm $c_0 = 0$ setzen.

Die Vergleichung der Coefficienten der beiden niedrigsten Potenzen, die bei der Entwickelung um den Unendlichkeitspunkt $u = iK'$ sich ergeben, führt zu den Gleichungen:

$$2)\qquad \frac{c_8}{sn\beta} = -m(m+1)(m+2) + c_1\frac{m(m+1)}{sn\beta} - mc_4,$$

$$3)\qquad \lambda\left(c_4 + 3m(m+1) - \frac{2mc_1}{sn\beta}\right) = R,$$

$$R = m(m+1)\frac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn^2\beta}c_1 + \frac{mc_3}{sn\beta} + c_7 - \frac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn^2\beta}c_8.$$

Sollen sich mehrere von einander verschiedene Werthe von λ ergeben, so ist das nicht anders möglich, als dass die beiden Gleichungen bestehen:

$$4)\qquad c_4 = \frac{2mc_1}{sn\beta} - 3m(m+1),$$

$$5)\qquad R = 0.$$

Es bleiben also zunächst nur die Coefficienten c_1, c_2, c_3, c_5, c_6 willkürlich, während die Coefficienten c_4, c_7, c_8 aus ihnen eindeutig bestimmt sind.

Betrachten wir nun die determinirenden Gleichungen für die beiden singulären Punkte, nehmen den Fall $c_1 = 0$ aus und schliessen analog wie früher, so folgt der

Lehrsatz: Alle Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Integrale die angegebene Form besitzen und zwar bei verschiedenen Werthen von λ, deren Coefficienten ferner noch einen weiteren Unendlichkeitspunkt erster Ordnung haben, können in die Form 1) gebracht werden, wobei $\frac{c_1}{sn\beta}$ eine der Zahlen 1, 2, ... $3m$ bedeutet und die Beziehungen bestehen:

$$c_4 = \frac{2mc_1}{sn\beta} - 3m(m+1),$$

$$c_7 = -m(m+1)\frac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn^2\beta}c_1 - \frac{mc_3}{sn\beta} + \frac{cn\beta\,.\,dn\beta}{sn^2\beta}c_8,$$

$$\frac{c_8}{sn\beta} = -m(m+1)(m+2) + \frac{m(m+1)}{sn\beta}c_1 - mc_4.$$

§ 52.

Untersuchung des Falles $m = 1$ für ungleiche Werthe von λ.

Wir wollen nun ein Beispiel für den im vorigen Paragraphen behandelten Fall nehmen und setzen dazu $m = 1$. Unter dieser Voraussetzung nehmen die Gleichungen, welche zur Lösung des Problems führen, die folgende Form an:

1) $$c_8 = 0,$$

2) $$c_4 sn\beta = -6sn\beta + 2c_1,$$

3) $$c_7 sn^2\beta = -2cn\beta . dn\beta - c_3 . sn\beta,$$

4) $$k^2 c_4 . x = 2A_0 - 2c_7 . \lambda + c_1 . \lambda^2,$$

wobei gesetzt ist:

$$A sn^3\beta = (1 + k^2 - c_2) sn^3\beta - [(1 + k^2)c_1 + c_6] n^2\beta$$
$$+ c_3 . sn\beta . cn\beta . dn\beta + 2c_1,$$

5) $$2k^2 u(2sn\beta - c_1) = B_0 + B_1 . \lambda + B_2 . \lambda^2 + B_3 . \lambda^3 + \frac{k^2}{2} x . B_4,$$

wobei die Grössen B die Werthe besitzen:

$$B_0 . sn^3\beta = \left(c_5 - \frac{1 + k^2}{2}(c_3 . sn\beta - c_7)\right) sn^4\beta - c_6 . sn^2\beta . cn\beta . dn\beta$$
$$+ c_3 \; sn\beta + 2c_1 . cn\beta . dn\beta,$$

$$B_1 . sn^2\beta = -\left(c_2 + \frac{1 + k^2}{2} c_4\right) sn^3\beta - (1 + k^2)c_1 . sn^2\beta$$
$$+ c_3 . sn\beta . cn\beta . dn\beta + 2c_1,$$

$$B_2 . sn\beta = c_1 . cn\beta . dn\beta,$$

$$B_3 = - sn\beta \quad ,$$

$$B_4 = c_3 - c_7 . sn\beta + (2c_1 + c_4 . sn\beta)\lambda,$$

6) $$k^2 sn\beta . u(c_3 + 2\lambda c_1) = C'_0 + k^2 . C'_1 . x + k^4 . sn^2\beta(3 + c_4)x^2,$$

wobei die Grössen C' gesetzt sind gleich:

$$C'_0 = -1 - k^2 + 3\lambda^2 + c_2,$$

$$C'_1 = 3 + c_4 + (1 + k^2 - c_2)sn^2\beta + c_3 . cn\beta . dn\beta$$
$$+ 2\lambda c_1 . cn\beta . dn\beta - 3\lambda^2 sn^2\beta.$$

Wir wollen nun nicht den allgemeinen Fall weiter führen, sondern sofort die drei möglichen Werthe von c_1 behandeln.

Erstens kann sein:

$$c_1 = 3sn\beta.$$

Unter dieser speciellen Annahme nehmen die Gleichungen zwischen den in den Coefficienten auftretenden Constanten die Form an:

$$7)\quad \begin{cases} c_4 = c_7 = c_8 = 0, \\ c_3 = - 6 cn\beta . dn\beta, \end{cases}$$

während aus der Gleichung:

$$A_0 = 0$$

sich für c_6 der Werth ergiebt:

$$8)\quad c_6 = [4(1 + k^2) - c_2] sn\beta - 6k^2 sn^3\beta.$$

Es bleiben demnach nur die Constanten c_2 und c_5 willkürlich. Die Gleichungen für λ und die Unbekannte α können geschrieben werden:

$$9)\quad - 2uk^2 sn\beta = B_0 + B_1 . \lambda + 3cn\beta . dn\beta . \lambda^2 - \lambda^3 + \frac{k^2}{2} x B_4,$$

wobei die Grössen B jetzt die Form annehmen:

$$B_0 . sn\beta = [c_5 + 3(1 + k^2) sn\beta . cn\beta . dn\beta] sn^2\beta - c_6 . cn\beta . dn\beta,$$
$$B_1 = [3(1 + k^2) - c_2] sn\beta - 6k^2 sn^3\beta,$$
$$B_4 = - 6cn\beta . dn\beta + 6\lambda . sn\beta,$$

$$10)\quad 6k^2 sn\beta u(\lambda . sn\beta - cn\beta . dn\beta) = C_0 + k^2 C_1 . x + 3k^4 sn^2\beta . x^2,$$

wobei gesetzt ist:

$$C_0 = - 1 - k^2 + 3\lambda^2 + c_2,$$
$$C_1 = 3 + (1 + k^2 - c_2) sn^2\beta - 6cn^2\beta . dn^2\beta + 6\lambda . sn\beta . cn\beta . dn\beta - 3\lambda^2 . sn^2\beta.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Als erster Typus der in Frage stehenden Differentialgleichungen ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{d^3y}{du^3} + 3k^2 sn\beta . snu . sn(u + \beta) \frac{d^2y}{du^2} + [c_2 - 6k^2 cn\beta . dn\beta . snu . sn(u + \beta)] \frac{dy}{du}$$
$$= y[c_5 + c_6 . k^2 snu sn(u + \beta)].$$

Die Constanten c_2 und c_5 sind willkürlich, während c_6 aus der Gleichung bestimmt ist:

$$c_6 = [4(1 + k^2) - c_2] sn\beta - 6k^2 sn^3\beta.$$

Wir setzen jetzt:

$$\text{II.}\quad c_1 = 2sn\beta.$$

Aus den aufgestellten fundamentalen Beziehungen ergeben sich dann die Gleichungen:

$$11)\quad \begin{cases} c_4 = - 2, \quad c_8 = 0, \\ c_7 . sn\beta = - 4cn\beta . dn\beta - c_3. \end{cases}$$

Ferner war allgemein:

$$c_4 . \lambda^2 = k^2 c_4 . x - 2A_0 + 2c_7 . \lambda,$$

also wird:

$$c_4^2 . \lambda^3 = - 4c_7 . A_0 + 2c_4 . c_7 . k^2 x + \lambda(- 2A_0 . c_4 + 4c_7^2 + k^2 c_4^2 . x).$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung ein, die wir für die Grösse:

$$2k^2u(2sn\beta - c_1)$$

gefunden haben, so nimmt dieselbe die Form an:

12) $2k^2u(2sn\beta - c_1) = D_0 . sn\beta + \lambda D_1 . sn\beta + 2k^2x(2sn\beta - c_1)\left(\frac{c_7}{c_4} - \lambda\right),$

wobei gesetzt ist:

$$sn^2\beta . D_0 = B_0 . sn\beta - \frac{2c_1}{c_4} cn\beta . dn\beta + \frac{4c_7}{c_4^2} A_0 . sn^2\beta,$$

$$sn^2\beta . D_1 = B_1 . sn\beta + \frac{2c_1 . c_7}{c_4} cn\beta . dn\beta - \left(\frac{4c_7^2}{c_4^2} - \frac{2A_0}{c_4}\right) sn^2\beta.$$

Diese Formel gilt allgemein. Setzen wir nunmehr $c_1 = 2sn\beta$ in dieselbe ein, so ergeben sich unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$D_0 = 0, \quad D_1 = 0.$$

Die erste lehrt den Werth von c_5, die zweite den von c_6 kennen, sodass die Constanten c_2 und c_3 willkürlich bleiben. Die Constantenbeziehungen sind damit erledigt. Die Grössen λ und α sind aus den Gleichungen bestimmt:

13) $$k^2x = -A_0 + c_7 . \lambda + \lambda^2$$

und:

14) $$k^2sn\beta u(c_3 + 4\lambda . sn\beta) = C_0 + k^2C_1 . x + k^4sn^2\beta . x^2,$$

wobei gesetzt ist:

$$C_0 = -1 - k^2 + 3\lambda^2 + c_2,$$

$$C_1 = 1 + (1 + k^2 - c_2)sn^2\beta + c_3 . cn\beta . dn\beta + 4\lambda . sn\beta . cn\beta . dn\beta - 3\lambda^2 . sn^2\beta.$$

Damit sind wir auch in diesem Falle am Ziel.

Wir nehmen nun:

III. $c_1 = sn\beta$.

Dann folgen zunächst die Constantenbeziehungen:

15) $$\begin{cases} c_4 = -4, \quad c_8 = 0, \\ sn\beta . c_7 = -2cn\beta . dn\beta - c_3. \end{cases}$$

Wir wollen nun zunächst wieder allgemein neben der vorhin entwickelten Gleichung für u noch eine zweite Gleichung für dieselbe Grösse aufstellen, indem wir in Gleichung 6) an Stelle von λ^2 uns den Ausdruck eingesetzt denken:

$$\lambda^2 = k^2x - \frac{2A_0}{c_4} + \frac{2c_7}{c_4}\lambda.$$

Dann erhalten wir die Gleichung:

16) $k^2sn\beta u(c_3 + 2\lambda c_1) = E_0 + E_1 . k^2x + E_2 . k^4x^2 + \lambda(E_3 + k^2xE_4),$

in welcher die Grössen E die Werthe haben:

$$E_0 = -1 - k^2 + c_2 - \frac{6A_0}{c_4},$$

$$E_1 = \frac{2c_1}{sn\beta} + (1+k^2-c_2)sn^2\beta + c_2.cn\beta.dn\beta + \frac{6sn^2\beta A_0}{c_4},$$

$$E_2 = -2c_1.sn\beta, \quad E_3 = \frac{6c_7}{c_4},$$

$$E_4 = 2c_1.cn\beta.dn\beta - 6sn^2\beta\frac{c_7}{c_4}.$$

Eliminiren wir aus dieser und aus Gleichung 12) die Grösse u und ersetzen λ^2 in der vorhin angegebenen Weise, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x und λ als Eliminationsresultat. Die höchste Potenz von x, die vorkommen kann, ist die zweite, indessen überzeugt man sich leicht, dass der Factor von x^2 der Null gleich ist. Dasselbe gilt von dem Factor von λx. Es nimmt demgemäss die Gleichung die Form an:

$$G_0 + G_1.\lambda + G_2.x = 0.$$

Das gilt allgemein. Setzen wir nun $c_1 = sn\beta$, so müssen die drei Grössen G_0, G_1, G_2 der Null gleich sein, da sonst sich nicht alle drei Integrale in der verlangten Form ergeben können. Eine derselben ist identisch gleich Null, die beiden anderen ergeben gleich Null gesetzt die Gleichungen:

$$(c_3.D_0 + A_0.sn\beta.D_1)sn\beta = 2E_0,$$

$$[2sn\beta.D_0 + (c_3 - c_7.sn\beta)D_1]sn\beta = -3c_7.$$

Aus diesen Gleichungen sind die Constanten c_5 und c_6 bestimmt, sodass lediglich die Constanten c_2 und c_3 willkürlich bleiben. Damit sind die Beziehungen zwischen den Constanten sämmtlich aufgestellt. Die Werthe von λ und α folgen aus den aufgestellten Gleichungen.

§ 53.[10])

Die Picard'schen Differentialgleichungen. Hinzunahme der speciellen Fälle.

In den bisherigen Untersuchungen ist stets der allgemeine Fall in Betracht gezogen worden. Gehen wir zu den Betrachtungen des § 36 zurück, so haben wir angenommen, dass z_1 sich in die Form bringen lässt:

$$1)\qquad z_1 = \sum\left(A_0.f(u-\beta) + \cdots A_r.\frac{d^r f(u-\beta)}{du^r}\right),$$

wobei die Summe über alle Unendlichkeitspunkte von z_1 zu erstrecken und gesetzt ist:

$$2)\qquad f(u) = \frac{\vartheta_1(v+\omega)}{\vartheta_1(v)}e^{\lambda v}.$$

Nun können zwei weitere Fälle eintreten, die wir als specielle bezeichnen wollen.

Erstens können die Multiplicatoren die Form haben:

$$3)\qquad \mu = e^{2hK}, \quad \mu_1 = e^{2hiK'}.$$

Auf diesen Fall hat zuerst Mittag-Leffler aufmerksam gemacht. Wir können dann setzen:

$$4)\qquad z_1 = a_0 . e^{hu} + \sum\left(A_0 . f(u-\beta) + \cdots A_r . \frac{d^r f(u-\beta)}{du^r}\right),$$

wobei die Summe über alle Unendlichkeitspunkte von z_1 zu nehmen und gesetzt ist:

$$5)\qquad f(u) = \frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)} e^{hu}.$$

Hierbei müssen die Grössen A_0 gleich Null sein, da wir es mit Picard'schen Differentialgleichungen zu thun haben, ferner findet die Relation statt:

$$6)\qquad \sum(A_1 . h + A_2 . h^2 + \cdots A_r . h^r) e^{-h\beta} = 0.$$

Nimmt man also h von Null verschieden an, so wird:

$$\int z_1 du = \frac{a_0}{h} e^{hu} + \sum\left(A_1 . f(u-\beta) + \cdots A_r . \frac{d^{r-1} f(u-\beta)}{du^{r-1}}\right),$$

also folgt unter Hinzunahme der soeben aufgestellten Relation zwischen den Grössen A, dass das Integral eine doppeltperiodische Function zweiter Art ist mit den Multiplicatoren:

$$e^{2hK} \text{ und } e^{2hiK'}.$$

Es bleibt also das zweite Integral der Picard'schen Differentialgleichung eine doppeltperiodische Function und damit das wesentlichste Resultat bestehen. Einige andere Resultate freilich modificiren sich, indessen wollen wir hierauf nicht näher eingehen. Es kann das um so eher geschehen, als dieser Fall in der Literatur bisher wenig berücksichtigt worden ist und an Bedeutung den übrigen nachsteht.

Der dritte und letzte Fall tritt ein, wenn $h = 0$ ist. In diesem Falle ist nun:

$$\int z_1 . du$$

nicht mehr eine doppeltperiodische Function, setzt sich vielmehr linear aus

$$u \text{ und } \frac{\vartheta'_1(v-b)}{\vartheta_1(v-b)}$$

zusammen.

Um die hierbei und bei den folgenden Integralen auftretenden Möglichkeiten zu untersuchen, stellen wir die folgenden allgemeinen Ueberlegungen an. Zunächst führen wir an Stelle der Function:

$$\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)}$$

die $\zeta(u)$-Function ein und zwar setzen wir wie in § 82 des ersten Bandes:

$$7)\qquad \zeta(u) = \frac{1}{\pi^2 k^2 \vartheta_3^4}\,\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\,u - \frac{1}{k^2}\,\frac{d\log\vartheta_0(v)}{du}.$$

Diese Function $\zeta(u)$ leistet zwei Gleichungen von der Form Genüge:

$$\zeta(u + 2K\ ) = \zeta(u) + A_1,$$
$$\zeta(u + 2iK') = \zeta(u) + A_2,$$

wobei A_1 und A_2 zwei Constanten bedeuten, deren Werth nicht hingeschrieben zu werden braucht.

Es handelt sich um die Betrachtung ganzer Functionen von u und $\zeta(u)$, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind und zwar entweder der ersten oder der zweiten Art.

An Stelle dieser Polynome können wir auch solche von $u - \alpha$ und $\zeta(u - \alpha)$ in Betracht ziehen, da $\zeta(u - \alpha)$ nach bekannten Regeln durch $\zeta(u)$ dargestellt werden kann. Hierbei ist α eine beliebige Grösse, die nur der einen Bedingung Genüge leistet, dass für $u = \alpha$ das Polynom nicht unendlich gross wird. Wir können aber an Stelle von $u - \alpha$ und $\zeta(u - \alpha)$ noch andere Functionen einführen. Wir setzen:

$$8)\qquad \gamma(u) = c_1 . (u - \alpha) + c_2 . \zeta(u - \alpha),$$

$$9)\qquad \delta(u) = c_3 . (u - \alpha) + c_4 . \zeta(u - \alpha).$$

Die vier Constanten c_1, c_2, c_3, c_4 können dann so bestimmt werden, dass die Gleichungen stattfinden:

$$\gamma(u + 2K) = \gamma(u)\quad,\quad \gamma(u + 2iK') = \gamma(u) + 1,$$
$$\delta(u + 2K) = \delta(u) + 1,\quad \delta(u + 2iK') = \delta(u).$$

Diese Functionen $\gamma(u)$ und $\delta(u)$ wollen wir uns an Stelle der Functionen $(u - \alpha)$ und $\zeta(u - \alpha)$ zu Grunde gelegt denken und Functionen von der Form betrachten:

$$10)\qquad F(u) = \sum \gamma^n . \delta^m . f,$$

wobei die Grössen f doppeltperiodische Functionen sind. Es fragt sich, wie sieht das Integral derartiger Functionen aus, wenn wir festsetzen, dass es eindeutig sein soll. Offenbar giebt die Lösung dieses

Problemes die Form der Integrale der Picard'schen Differentialgleichungen in dem von uns in Betracht gezogenen speciellen Fall.

Bevor wir zu der Lösung übergehen, nehmen wir den folgenden

Hülfssatz: Es seien $A, B, \ldots$; $\mu, \nu \ldots$; $n, p, \ldots$ feste Grössen und l eine willkürliche ganze Zahl. Wenn dann für jeden Werth von l die Gleichung stattfindet:

$$Al^n\mu^l + Bl^p\nu^l + \cdots = 0,$$

so sind alle Grössen $A, B, \ldots$ gleich Null.

Der Beweis ist so einfach, dass von demselben abgesehen werden kann.

Dieses vorausgesetzt, nehmen wir an, dass

$$u = u_1$$

ein Unendlichkeitspunkt von $F(u)$ ist und denken uns $F(u)$ nach Potenzen von $u - u_1$ entwickelt.

Wenn dann:

$$\int F(u)\,du$$

eine eindeutige Function sein soll, so muss der Coefficient von $(u - u_1)^{-1}$ — der Rest — in jener Entwickelung verschwinden. Wenn aber:

$$u = u_1$$

ein Unendlichkeitspunkt ist, so sind es die Punkte:

$$u_1 + 2lK$$

auch. Wird die Function $F(u)$ in diesen Punkten unendlich gross, so müssen es eine oder mehrere der Functionen $f(u)$ auch werden. Wir greifen dieselben heraus und bezeichnen eine derselben durch $f(u)$. Den Multiplicator von $f(u)$, wenn u übergeht in $u + 2K$, bezeichnen wir durch μ, den Rest für den Punkt:

$$u = u_1$$

durch A. Dann ist der Rest der Function $F(u)$ für den Punkt

$$u_1 + 2lK$$

gleich:

$$\sum \gamma^n(\delta + l)^m \mu^l A,$$

wobei die Summe über alle in Betracht gezogenen Glieder von $F(u)$ zu erstrecken ist. Dieselbe muss gleich Null sein und zwar für einen jeden ganzzahligen Werth von l. Entwickeln wir nun den Ausdruck:

$$(\delta + l)^m$$

nach Potenzen von l, so erhalten wir eine Grösse von der Art, wie sie im Hülfssatz in Betracht gezogen ist. Die Coefficienten der einzelnen Ausdrücke:

$$l^r \mu^l$$

müssen verschwinden. Wir beschränken uns darauf, die Glieder zu nehmen, die zum höchsten Exponenten von l — der Grösse m gehören. Ihnen entsprechen in der allgemeinen Summe Glieder:

$$\delta^m \sum{}' \gamma^n f.$$

Es ist dabei ein Strich an die Summe gesetzt, um sie von der ursprünglichen zu unterscheiden.

In dieser Summe sind alle diejenigen Glieder zusammenzufassen, die dem Multiplicator μ entsprechen. Wir wollen eine derartige Theilsumme bezeichnen durch:

$$\delta^m \sum{}'' \gamma^n . f.$$

Dann muss der Rest eines jeden dieser Ausdrücke verschwinden oder da wir von dem Factor δ^m absehen können, der Rest von:

$$\sum{}'' \gamma^n . f.$$

Mit dieser Summe verfahren wir wie mit der ursprünglichen, nur dass wir die Unendlichkeitspunkte

$$u_1 + 2liK'$$

ins Auge fassen. Schliessen wir dann ganz analog wie vorhin, so folgt, dass der Rest von f, welches zu dem höchsten Exponenten von γ gehört, für den Punkt:

$$u = u_1$$

verschwinden muss. Wenn aber der Rest von f verschwindet, so ist das Integral:

$$\varphi(u) = \int f(u) du$$

eine eindeutige Function. Nach unseren früheren Betrachtungen ist dabei $\varphi(u)$ entweder selbst doppeltperiodisch oder aber eine lineare Function von u und $\zeta(u)$, also auch von γ und δ mit doppeltperiodischen Coefficienten. Unter solchen Umständen können wir setzen:

11a) $$F(u) = \gamma^n \delta^m \varphi'(u) + F_1(u),$$

oder auch:

11b) $$F(u) = [\gamma^n \delta^m \varphi(u)]' + F_1(u) - (\gamma^n \delta^m)' \varphi(u).$$

Dabei hat der Ausdruck:

$$(\gamma^n \delta^m)'$$

die Form:

$$\gamma^{n-1} \delta^m f_1(u) + \gamma^n \delta^{m-1} f_2(u),$$

wobei $f_1(u)$ und $f_2(u)$ doppeltperiodische Functionen sind. Daraus folgt, dass wir setzen können:

12) $$F(u) = [\gamma^n \delta^m \varphi(u)]' + \Phi(u),$$

wobei $\Phi(u)$ eine Function derselben Art wie $F(u)$ ist, bei welcher aber die höchsten Exponenten von γ und δ kleiner geworden sind.

Fährt man so fort und berücksichtigt die Bemerkungen, die über $\varphi(u)$ gemacht worden sind, so folgt der

Lehrsatz: Wenn eine ganze rationale Function von u und $\zeta(u)$ mit doppeltperiodischen Coefficienten die Ableitung einer eindeutigen Function ist, so ist die letztere ein Polynom derselben Art, dessen Grad den Grad des ursprünglichen Polynoms um 1 übersteigen kann.

Dass bei den letzten Untersuchungen die Integrationsconstante keinen Einfluss auf die Richtigkeit der Resultate hat, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

Gehen wir nun zu unseren Differentialgleichungen zurück, so können wir den von uns ins Auge gefassten speciellen Fall unmittelbar und allgemein erledigen. In der That betrachten wir successive die Differentialgleichungen erster, zweiter, ... n^{ter} Ordnung und wenden immer unseren Lehrsatz bei dem Uebergange zu einer Gleichung höherer Ordnung an, so ergiebt sich der

Lehrsatz: Die Integrale einer Picard'schen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung stellen sich als ganze Functionen von u und $\zeta(u)$ mit doppeltperiodischen Coefficienten dar, deren Grad mindestens um 1 kleiner ist, als die Ordnung der Differentialgleichung beträgt.

Hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit des

Lehrsatzes: Die Integrale einer Picard'chen Differentialgleichung zerfallen in Gruppen. In einer und derselben Gruppe, welche r von einander verschiedene Integrale enthalten möge, ist eines doppeltperiodisch, ein zweites eine lineare Function von u und $\zeta(u)$, ein drittes eine Function zweiten Grades etc., das letzte eine Function $r-1^{\text{ten}}$ Grades. Alle Coefficienten haben dieselben Multiplicatoren wie das erste Integral.

An Stelle von $\zeta(u)$ können nach den vorangegangenen Bemerkungen auch andere Functionen gewählt werden. Wir wollen im Folgenden die Grössen:

$$\frac{Al'_\alpha(u)}{Al_\alpha(u)}$$

nehmen.



§ 54.

Die Lamé'sche Differentialgleichung. Discussion der speciellen Fälle für $m=1$ und $m=2$.

Die Lamé'sche Differentialgleichung zweiter Ordnung entstand, indem wir die Bedingung festsetzten, dass die Integrale den Punkt $u = iK'$ als alleinigen Unendlichkeitspunkt m^{ter} Ordnung besitzen, während die Coefficienten keinen weiteren Unendlichkeitspunkt haben. Als Form derselben ergab sich:

$$1)\qquad \frac{d^2y}{du^2} = y(c_0 + c_1 . k^2 sn^2 u).$$

Das allgemeine Integral derselben hatte die Form:

$$2)\qquad y = c_1 . e^{\lambda u} \prod \frac{\vartheta_1(v-a_r)}{\vartheta_0(v)} + c_2 . e^{-\lambda u} \prod \frac{\vartheta_1(v+a_r)}{\vartheta_0(v)}.$$

Die Betrachtungen des allgemeinen Falles stützten sich wesentlich auf die Annahme, dass die Grössen $sn^2 a_r$ alle von einander verschieden sind. In den speciellen Fällen, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden, kann dasselbe also nicht mehr der Fall sein. Dazu fragen wir, wann die beiden vorhin hingeschriebenen particulären Integrale zusammenfallen, oder also, wann die Ausdrücke:

$$\prod \vartheta_1(v+a_r) \quad \text{und} \quad \prod \vartheta_1(v-a_r)$$

dieselben Nullstellen besitzen, wenn überdies:

$$\lambda = 0$$

ist. Hierbei folgt zunächst wie im allgemeinen Falle, dass die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ von einander verschieden sein müssen.

Ehe wir nun zu dem allgemeinen Falle übergehen, wollen wir die einfachsten Fälle für sich betrachten und zwar zunächst den Fall:

$$m = 1.$$

In ihm kommt das Problem darauf hinaus, zu untersuchen, wann:

$$\vartheta_1(v+a_1) = c\,\vartheta(v-a_1)$$

wird.

Offenbar sind drei Fälle möglich:

$$\text{I.}\quad a_1 = 0,$$
$$\text{II.}\quad a_1 = K,$$
$$\text{III.}\quad a_1 = K + iK'.$$

Im ersten Falle wird ein particuläres Integral:

$$3)\qquad y_1 = sn\,u,$$

das zweite also:

4) $$y_2 = sn\,u \int \frac{du}{sn^2 u} = sn\,u \; \frac{Al_1'(u)}{Al_1(u)}.$$

Im zweiten Falle wird:

5) $$y_1 = cn\,u,$$

6a) $$y_2 = cn\,u \int \frac{du}{cn^2 u},$$

oder also:

6b) $$y_2 = cn\,u\left(k^2 u + \frac{Al_2'(u)}{Al_2(u)}\right).$$

Im dritten Falle wird:

7) $$y_1 = dn\,u,$$

8a) $$y_2 = dn\,u \int \frac{du}{dn^2 u},$$

oder also:

8b) $$y_2 = dn\,u\left(u + \frac{Al_3'(u)}{Al_3(u)}\right).$$

Damit ist in diesen speciellen Fällen die Integration vollendet. Die Werthe der Constanten c_0 und c_1 folgen unmittelbar. Es rühren diese Resultate von Fuchs und Hermite her.

Wir nehmen zweitens: $m = 2$.

Dann fragt es sich, wann die Gleichung bestehen kann:

$$\vartheta_1(v + a_1)\vartheta(v + a_2) = c\vartheta_1(v - a_1)\vartheta(v - a_2).$$

Berücksichtigen wir, dass a_1 verschieden sein muss von a_2, so bleiben vier Möglichkeiten übrig:

$$\text{I.} \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha,$$
$$\text{II.} \quad \alpha_1 = K, \quad \alpha_2 = 0,$$
$$\text{III.} \quad \alpha_1 = K, \quad \alpha_2 = K + iK',$$
$$\text{IV.} \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = K + iK'.$$

Im ersten Falle wird ein particuläres Integral:

9) $$y_1 = sn^2 u - sn^2 \alpha.$$

Der Werth von α ist auf mehrfache Weise zu bestimmen. Ganz allgemein ergiebt sich im Falle $m = 2$, wenn wir die frühere Bezeichnungsweise aufnehmen, die Gleichung:

$$\frac{u_1 + u_2}{x_1 - x_2} = 0.$$

Wird nun $x_1 = x_2$, $u_1 = -u_2$, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

10) $$1 - 2(1 + k^2)sn^2\alpha + 3k^2 sn^4 \alpha = 0.$$

Es ist diese Gleichung zuerst von Hermite aufgestellt worden. Sie zeigt, dass es zwei Integrale der vorhin charakterisirten Art giebt.

Das zweite Integral wird:

11) $$y_2 = y_1 \int \frac{du}{(sn^2 u - sn^2 \alpha)^2}.$$

Wenn $sn^2 \alpha$ in der vorhin angegebenen Art bestimmt wird, so ist der Ansatz erlaubt:

$$\frac{1}{(sn^2 u - sn^2 \alpha)^2} = e_0 + e_1 \frac{d^2 log Al_1(u-\alpha)}{du^2} + e_2 \frac{d^2 log Al_1(u+\alpha)}{du^2}.$$

Die Constanten e_0 e_1, e_2 bestimmen sich leicht. In der That, für den Punkt

$$u = \alpha$$

ergiebt sich:

$$\frac{1}{sn^2 u - sn^2 \alpha} = \frac{1}{2(u-\alpha) sn\alpha . cn\alpha . dn\alpha} + \cdots$$

Unter solchen Umständen wird:

$$e_1 = - \frac{1}{4 sn^2 \alpha . cn^2 \alpha . dn^2 \alpha}.$$

Ebenso folgt:

$$e_2 = - \frac{1}{4 sn^2 \alpha . cn^2 \alpha . dn^2 \alpha}.$$

Setzen wir schliesslich links und rechts $u = 0$, so ergiebt sich für e_0 die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{sn^4 \alpha} = e_0 + \frac{1}{2 sn^4 \alpha \; cn^2 \alpha . dn^2 \alpha}.$$

Damit ist die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung im ersten Falle vollkommen zu Ende geführt Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

12) $$\frac{d^2 y}{du^2} = y\left(- \frac{2}{sn^2 \alpha} + 6k^2 sn^2 u\right).$$

Wir nehmen den zweiten Fall. In ihm ist:

13) $$y_1 = snu . cnu.$$

Mithin wird:

$$y_2 = y_1 \int \frac{du}{sn^2 u . cn^2 u}.$$

Das Integral, welches in diesem Ausdruck auftritt, kann unmittelbar bestimmt werden. In der That, es ist:

$$\frac{1}{sn^2 u . cn^2 u} = \frac{1}{sn^2 u} + \frac{1}{cn^2 u},$$

mithin wird:

14) $$y_2 = y_1 \int \frac{du}{sn^2 u} + y_1 \int \frac{du}{cn^2 u}.$$

Damit haben wir die vorhin betrachteten Integrale erhalten und die Integration auch in diesem Falle ausgeführt.

Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$15)\qquad \frac{d^2y}{du^2} = y(-4 - k^2 + 6k^2sn^2u).$$

Drittens wird:

$$16)\qquad y_1 = cnu \,.\, dnu.$$

Mithin ergiebt sich für das zweite Integral die Form:

$$y_2 = y_1 \int \frac{du}{cn^2u \,.\, dn^2u}.$$

Da aber die Gleichung besteht:

$$\frac{1}{cn^2u \,.\, dn^2u} = \frac{1}{k'^2}\frac{1}{cn^2u} - \frac{k^2}{k'^2}\frac{1}{dn^2u},$$

so folgt:

$$17)\qquad y_2 = \frac{y_1}{k'^2}\int \frac{du}{cn^2u} - \frac{k^2}{k'^2}y_1 \int \frac{du}{dn^2u}.$$

Hiermit sind wir wieder am Ziel. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$18)\qquad \frac{d^2y}{du^2} = y(-1 - k^2 + 6k^2sn^2u).$$

Endlich letztens kann sein:

$$19)\qquad y_1 = snu \,.\, dnu,$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{du}{sn^2u \,.\, dn^2u}.$$

Da aber die Gleichung besteht:

$$\frac{1}{sn^2u \,.\, dn^2u} = \frac{1}{sn^2u} + \frac{k^2}{dn^2u},$$

so wird ein zweites particuläres Integral:

$$20)\qquad y_2 = y_1 \int \frac{du}{sn^2u} + k^2y_1 \int \frac{du}{dn^2u}.$$

Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$21)\qquad \frac{d^2y}{du^2} = y(-1 - 4k^2 + 6k^2sn^2u).$$

Damit ist der Fall $m = 2$ vollkommen erledigt, soweit er hier in Betracht kommt.

§ 55.

Die Lamé'sche Differentialgleichung. Allgemeine Discussion der speciellen Fälle.

Um den allgemeinen Fall zu untersuchen, müssen wir unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist.

Wir nehmen zuerst an:

$$m = 2\mu.$$

Die Frage lautet, wann die beiden Ausdrücke:

$$\vartheta_1(v + a_1) \ldots \vartheta_1(v + a_{2\mu}) \quad \text{und} \quad \vartheta_1(v - a_1) \ldots \vartheta_1(v - a_{2\mu})$$

dieselben Nullpunkte besitzen.

Unter Berücksichtigung der früheren Bemerkungen folgt dann, dass vier und nur vier Fälle möglich sind:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \alpha_1 = -\alpha_{2\mu}, \quad \alpha_2 = -\alpha_{2\mu-1}, \ldots \alpha_\mu = -\alpha_{\mu+1}, \\ \text{II.} & \alpha_1 = K, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -\alpha_{2\mu}, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2}, \\ \text{III.} & \alpha_1 = K + iK', \quad \alpha_2 = K, \quad \alpha_3 = -\alpha_{2\mu}, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2}, \\ \text{IV.} & \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = K + iK', \quad \alpha_3 = -\alpha_{2\mu}, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2}. \end{array}$$

Zu gleicher Zeit haben wir $\lambda = 0$ zu setzen.

Das allgemeine Gleichungssystem lautete nun:

$$1) \qquad 0 = \sum\nolimits_l' \frac{u_r + u_l}{x_r - x_l}.$$

Wenden wir uns zu der Betrachtung des ersten Falles, so wird ein Glied existiren, bei welchem

$$u_r = -u_l, \quad x_r = x_l$$

ist. An Stelle desselben tritt das Glied:

$$\frac{1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2x_r^2}{2u_r}.$$

Das ganze System von Gleichungen nimmt die Form an:

$$2) \qquad 0 = 1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2x_r^2 + 4\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Der Strich an der Summe bedeutet, dass dieselbe nach l über $1, 2, \ldots \mu$ zu nehmen ist und zwar mit Ausnahme von $l = r$. An Stelle von r ist der Reihe nach zu setzen $1, 2, \ldots \mu$.

Wir erhalten also ein System von μ Gleichungen, welches die Werthe x_r in der folgenden Weise liefert. Dieselben mögen der Gleichung Genüge leisten:

$$3) \qquad f(x) = x^\mu + p_1 . x^{\mu-1} + \cdots p_\mu = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung kann das obige Gleichungssystem geschrieben werden:

$$4) \; f'(x_r)[1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2x_r^2] + 2f''(x_r)x_r[1 - (1 + k^2)x_r + k^2x_r^2] = 0,$$

wobei dann gesetzt ist:

$$f'(x_r) = \mu x_r^{\mu-1} + (\mu - 1)p_1 . x_r^{\mu-2} + \cdots p_{\mu-1},$$
$$f''(x_r) = \mu(\mu - 1)x_r^{\mu-2} + \cdots 2p_{\mu-2}.$$

Wir erhalten also eine Gleichung vom Grade $\mu + 1$ mit der Unbekannten x_r, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Grössen x_r sind. Der Factor von $x_r^{\mu+1}$ lautet:

$$k^2\mu(2\mu + 1),$$

der Factor von x_r^l allgemein:

$$A \cdot p_{\mu-l+1} + B \cdot p_{\mu-l} + C \cdot p_{\mu-l-1},$$

wobei gesetzt ist:

$$A = k^2(l-1)(2l-1),$$
$$B = -2(1+k^2)l^2,$$
$$C = (l+1)(2l+1).$$

Nun ist aber:

$$k^2\mu(2\mu + 1)x_r^{\mu+1} = -k^2\mu(2\mu + 1)(p_1 . x_r^\mu + p_2 . x_r^{\mu-1} + \cdots p_\mu . x_r).$$

Denken wir uns diesen Ausdruck eingesetzt, so nimmt der Factor von x_r^l die Form an:

$$A_1 \cdot p_{\mu-l+1} + B \cdot p_{\mu-l} + C \cdot p_{\mu-l-1},$$

wobei gesetzt ist:

$$A_1 = A - k^2\mu(2\mu + 1).$$

Der Factor von x_r^μ nimmt insbesondere die Form an:

$$k^2p_1[(2\mu - 1)(\mu - 1) - \mu(2\mu + 1)] - 2(1 + k^2)\mu^2.$$

Denken wir uns durch diesen Factor die Gleichung dividirt, so erhalten wir eine Gleichung, deren Coefficienten mit denen der Gleichung:

$$x^\mu + p_1 . x^{\mu-1} + \cdots p_\mu = 0$$

zusammenfallen müssen.

Die Vergleichung ergiebt die Formeln:

$$5) \qquad N . p_{\mu-l} = A_1 . p_{\mu-l+1} + B . p_{\mu-l} + C . p_{\mu-l-1};$$

wobei N der vorhin hingeschriebene Factor von x_r^μ ist, durch den wir die Gleichung dividirt haben.

Aus diesen Gleichungen sind die Grössen $p_2, p_3, \ldots p_\mu$ bestimmt und zwar als ganze Functionen von p_1 von den resp. Graden $2, 3, \ldots \mu$. Setzen wir diese Ausdrücke in die letzte Gleichung ein, die dem Werthe $l = 0$ entspricht, so ergiebt sich eine Gleichung vom Grade $\mu + 1$ mit der Unbekannten p_1. Wir finden also den

Lehrsatz: Das Gleichungssystem 4) ist auflösbar und zwar leisten die Grössen x_r einer Gleichung μ^{ten} Grades Genüge, deren Coefficienten sich sämmtlich ganz und rational durch eine Lösung einer Gleichung vom Grade $\mu + 1$ darstellen lassen.

Damit ist das erste Integral gefunden. Es hat keine Schwierigkeit, mit seiner Hülfe das zweite zu ermitteln.

Dasselbe lautet:

$$6)\qquad y_2 = y_1 \int \frac{du}{(x-x_1)^2 \ldots (x-x_\mu)^2}.$$

Entwickeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{(x-x_1)^2 \ldots (x-x_\mu)^2} = \frac{1}{f(x)^2}$$

nach Potenzen von $u - \alpha_r$, so fällt vermöge unserer Bedingungsgleichungen der Factor von:

$$\frac{1}{u - \alpha_r}$$

fort und umgekehrt zieht das Fortfallen des Factors unsere Bedingungsgleichungen nach sich. In der That, es ist:

$$f(x) = (u-\alpha_r)\left(\frac{df(x)}{du}\right)_{\alpha_r} + \frac{(u-\alpha_r)^2}{1.2}\left(\frac{d^2f(x)}{du^2}\right)_{\alpha_r} + \cdots$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{df(x)}{du}\right)_{\alpha_r} = 2f'(x_r).sn\alpha_r . cn\alpha_r . dn\alpha_r,$$

$$\left(\frac{d^2f(x)}{du^2}\right)_{\alpha_r} = 4f''(x_r).sn^2\alpha_r.cn^2\alpha_r.dn^2\alpha_r + 2f'(x_r)[1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2x_r^2).$$

Als hinreichende und nothwendige Bedingung für das Verschwinden des genannten Factors ergiebt sich aber die Gleichung:

$$\left(\frac{d^2f(x)}{du^2}\right)_{\alpha_r} = 0$$

und das ist die früher gefundene.

Unter solchen Umständen können wir den Ansatz machen:

$$\frac{1}{f(x)^2} = e_0 + \sum e_r \frac{d^2 log Al_1(u-\alpha_r)}{du^2} + \sum e_r' \frac{d^2 log Al_1(u+\alpha_r)}{du^2},$$

wobei die Constanten unmittelbar zu bestimmen sind.

In ähnlicher Weise sind die drei anderen Fälle zu betrachten. Da nichts principiell Neues auftritt, so wollen wir uns bei ihnen noch kürzer fassen.

Im zweiten Falle hat ein Integral die Form:

$$7)\qquad y_1 = snu . cnu(sn^2u - sn^2\alpha_3)\ldots(sn^2u - sn^2\alpha_{\mu+1}).$$

Dann fallen von den allgemeinen Gleichungen:

$$0 = \sum{}' \frac{u_r + u_l}{x_r - x_l}$$

zwei fort, nämlich diejenigen, die sich auf

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = K$$

beziehen. Es bleiben nur $\mu - 1$ Gleichungen, welche die Form haben:

$$0 = 1-2(1+k^2)x_r + 3k^2x_r^2 + 4\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{2u_r^2}{x_r} + \frac{2u_r^2}{x_r - 1},$$

wobei für r zu setzen ist $3, 4, \ldots \mu+1$, die Summe nach l über dieselben Zahlen mit Ausschluss von $l = r$ zu erstrecken ist.

Das Gleichungssystem kann geschrieben werden:

$$0 = \frac{1-2(1+k^2)x_r + 3k^2x_r^2}{2} + 2\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + 1 - (1+k^2)x_r$$
$$+ k^2x_r^2 - x_r(1 - k^2x_r),$$

oder auch:

$$8) \qquad 0 = \frac{3 - 2(3+2k^2)x_r + 7k^2x_r^2}{2} + 2\sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit haben wir ein ähnliches Gleichungssystem wie vorhin erhalten, welches analog wie das vorige behandelt werden kann.

Im dritten Falle hat ein particuläres Integral die Form:

$$9) \qquad y_1 = cnu \, . \, dnu(sn^2u - sn^2a_3) \ldots (sn^2u - sn^2a_{\mu+1}).$$

Dann fallen von den allgemeinen Gleichungen wiederum zwei fort, nämlich diejenigen, welche sich auf

$$a = K \quad \text{und} \quad a = K + iK'$$

beziehen und es bleibt das System übrig:

$$0 = 1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{2u_r^2}{x_r - 1} + \frac{2u_r^2}{x_r - \frac{1}{k^2}},$$

oder also wir erhalten die Gleichungen:

$$10) \qquad 0 = 1 - 4(1+k^2)x_r + 7k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit sind wir wieder am Ziel.

Viertens endlich kann das erste Integral die Form haben:

$$11) \qquad y_1 = snu \, . \, dnu(sn^2u - sn^2a_3) \ldots (sn^2u - sn^2a_{\mu+1}).$$

Von den allgemeinen Gleichungen fallen zwei fort, nämlich diejenigen, die sich auf

$$a = 0 \quad \text{und} \quad a = K + iK'$$

beziehen.

Das übrig bleibende System lautet:

$$0 = 1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{2u_r^2}{x_r} + \frac{2u_r^2}{x_r - \frac{1}{k^2}},$$

oder also wir erhalten die Gleichungen:

$$12) \qquad 0 = 3 - 2(2+3k^2)x_r + 7k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit sind wir wieder am Ziel. In allen drei Fällen ergiebt sich das Resultat, dass die Grössen $x_3, x_4, \ldots x_{\mu+1}$ Wurzeln einer Gleichung vom Grade $\mu - 1$ sind, deren Coefficienten

sich ganz und rational durch eine Wurzel einer Gleichung vom Grade μ darstellen lassen.

Das zweite particuläre Integral kann in allen drei Fällen analog bestimmt werden, wie im ersten.

Der Werth von c_1 ist in allen vier Fällen gleich $m(m+1)$, während der Werth von c_0 sich in der bekannten Weise ergiebt.

Wir nehmen jetzt den Fall:

$$m = 2\mu + 1.$$

Es fragt sich, wann die beiden Ausdrücke:

$$\vartheta_1(v + a_1) \ldots \vartheta_1(v + a_{2\mu+1})$$

und

$$\vartheta_1(v - a_1) \ldots \vartheta_1(v - a_{2\mu+1})$$

dieselben Nullpunkte haben, wobei die Grössen a alle von einander verschieden sind.

Es folgt dann, dass auch hier vier Fälle möglich sind und zwar die folgenden:

I. $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\alpha_{2\mu+1}, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2},$

II. $\alpha_1 = K, \quad \alpha_2 = -\alpha_{2\mu+1}, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2},$

III. $\alpha_1 = K + iK', \quad \alpha_2 = -\alpha_{2\mu+1}, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2},$

IV. $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = K, \quad \alpha_3 = K + iK', \quad \alpha_4 = -\alpha_{2\mu+1}, \ldots \alpha_{\mu+2} = -\alpha_{\mu+3}.$

Im Princip bleiben die Betrachtungen genau wie vorhin.

Im ersten Falle hat ein particuläres Integral die Form:

$$13) \qquad y_1 = sn u (sn^2 u - sn^2 \alpha_2) \ldots (sn^2 u - sn^2 \alpha_{\mu+1}).$$

Eine Gleichung fällt von den allgemeinen fort, die übrigen haben die Form:

$$14) \quad 1 - 2(1+k^2)x_r + 3k^2 x_r^2 + 4\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + 2[1 - (1+k^2)x_r + k^2 x_r^2] = 0,$$

oder also wir erhalten das System:

$$15) \qquad 3 - 4(1+k^2)x_r + 5k^2 x_r^2 + 4\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem kann genau so wie das erste behandelt werden. Es ist auflösbar und zwar leisten die Grössen

$$x_2, x_3, \ldots x_{\mu+1}$$

einer Gleichung vom Grade μ Genüge, deren Coefficienten sich sämmtlich ganz und rational durch eine Lösung einer Gleichung vom Grade $\mu + 1$ darstellen lassen.

Ein zweites particuläres Integral hat die Form:

$$16)\qquad y_2 = y_1 \int \frac{du}{sn^2u(sn^2u - sn^2\alpha_2)^2 \ldots (sn^2u - sn^2\alpha_{\mu+1})^2}.$$

Entwickeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{sn^2u(sn^2u - sn^2\alpha_2)^2 \ldots (sn^2u - sn^2\alpha_{\mu+1})^2} = \frac{1}{xf(x)^2}$$

nach Potenzen von $u - \alpha_r$, so fällt vermöge unserer Bedingungsgleichungen der Factor von

$$\frac{1}{u - \alpha_r}$$

fort und umgekehrt zieht das Fortfallen dieses Factors unsere Bedingungsgleichungen nach sich.

In der That, es ist:

$$snu\,.\,f(x) = (u - \alpha_r)\left(\frac{d\,snu\,.\,f(x)}{du}\right)_{\alpha_r} + \frac{(u-\alpha_r)^2}{1\,.\,2}\left(\frac{d^2 snu\,.\,f(x)}{du^2}\right)_{\alpha_r} + \cdots$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{d\,snu\,.\,f(x)}{du}\right)_{\alpha_r} = 2f'(x_r)sn^2\alpha_r\,.\,cn\alpha_r\,.\,dn\alpha_r,$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d^2 snu\,.\,f(x)}{du^2}\right)_{\alpha_r} \\ = 2sn\alpha_r\{2f''(x_r)sn^2\alpha_r\,.\,cn^2\alpha_r\,.\,dn^2\alpha_r + f'(x_r)[3 - 4(1+k^2)x_r + 5k^2x_r^2]\}. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen für das Verschwinden des genannten Factors lauten demgemäss:

$$\begin{cases} f'(x_r)[3 - 4(1+k^2)x_r + 5k^2x_r^2] + 2x_r\,.\,f''(x_r)\,.\,M_r = 0, \\ M_r = 1 - (1+k^2)x_r + k^2x_r^2, \end{cases}$$

und das sind die früheren Gleichungen.

Unter solchen Umständen können wir schreiben:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{sn^2u\,.\,f(x)^2} = e_0 + e_1\dfrac{d^2 \log Al_1(u)}{du^2} + \sum_2^{\mu+1} e_r \dfrac{d^2 \log Al_1(u-\alpha_r)}{du^2} \\ \qquad + \sum_2^{\mu+1} e'_r \dfrac{d^2 \log Al_1(u+\alpha_r)}{du^2}. \end{cases}$$

Die Constanten sind wieder unmittelbar bestimmt.

Im zweiten Falle wird:

$$17)\qquad y_1 = cnu(sn^2u - sn^2\alpha_r)\ldots(sn^2u - sn^2\alpha_{\mu+1}).$$

Eine Gleichung fällt fort und es bleibt das System:

$$0 = 1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} - 2x_r(1 - k^2x_r),$$

oder also wir erhalten das System:

$$18) \qquad 0 = 1 - 2(2 + k^2)x_r + 5k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Drittens wird:

$$19) \qquad y_1 = dnu(sn^2u - sn^2\alpha_2) \ldots (sn^2u - sn^2\alpha_{\mu+1}).$$

Das übrigbleibende Gleichungssystem lautet:

$$0 = 1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} - 2k^2(x_r - x_r^2),$$

oder also wir erhalten die Gleichungen:

$$20) \qquad \frac{1 - 2(1 + 2k^2)x_r + 5k^2x_r^2}{2} + 2\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} = 0.$$

Viertens endlich kann sein:

$$21) \quad y_1 = snu.cnu.dnu(sn^2u - sn^2\alpha_4) \ldots (sn^2u - sn^2\alpha_{\mu+2}).$$

Hier fallen drei Gleichungen fort. Das übrigbleibende Gleichungssystem lautet:

$$0 = 1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + 2[1 - 2(1 + k^2)x_r + 3k^2x_r^2],$$

oder also wir erhalten die Gleichungen:

$$22) \qquad 0 = 3 - 6(1 + k^2)x_r + 9k^2x_r^2 + 4\sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Weiter wollen wir auf diese Fälle nicht eingehen, da sich nichts principiell Neues ergiebt.

§ 56.

Discussion der speciellen Fälle für die Picard'sche Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir wenden uns nunmehr zu der Differentialgleichung:

$$1) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + (m + 1)k^2 \frac{snu.cnu}{dnu} \frac{dy}{du} = y.c_0,$$

welche in § 40 näher untersucht worden ist. Aus den dortigen Untersuchungen folgt, dass nur der Fall des ungeraden m zu speciellen Betrachtungen Anlass geben kann.

Setzen wir:

$$m = 2\mu + 1,$$

so hat in diesem Falle ein Integral die Form:

$$\frac{\vartheta_1(v+a_1)\ldots\vartheta_1(v+a_m)}{\vartheta_0^m(v)}e^{\lambda u},$$

während das andere durch Verwandlung von v in $-v$ entsteht. Zunächst folgt, dass auch hier die Grössen $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ von einander verschieden sein müssen. Eines besonderen Beweises bedarf diese Eigenschaft nur für

$$a_\tau = K + iK'.$$

Wir beweisen, dass das Integral nicht die Form haben kann:

$$y = dn^r u \,.\, y_1.$$

In der That, wäre dasselbe der Fall, so müsste die Gleichung stattfinden:

$$dnu\frac{d^2[dnu^r . y_1]}{du^2} + 2(\mu+1)k^2 snu\,.\,cnu\frac{d[dn^r u\,.\,y_1]}{du} = dn^{r+1}u\,.\,y_1\,.\,c_0.$$

Differenziren wir rechts und links $r-1$ mal und setzen nach der Differentiation:

$$u = K + iK',$$

so ergiebt sich die Beziehung:

$$r - 1 = 2(\mu+1) \text{ das heisst } r = m + 2.$$

Diesen Werth kann r aber nicht haben. Der Satz bleibt auch richtig für $r = 1$, sodass sich also hier ein Unterschied gegenüber der Lamé'schen Gleichung zeigt. Das Integral kann keinen Factor dnu besitzen. Im Uebrigen bleiben die Betrachtungen ähnlich wie früher. Wir fassen uns noch kürzer als bei der Lamé'schen Gleichung. Wir nehmen zunächst den Fall:

$$m = 1.$$

Dann fragt sich, wann

$$\vartheta_1(v+a_1) \quad \text{und} \quad \vartheta_1(v-a_1)$$

unter den angegebenen Bedingungen zu gleicher Zeit der Null gleich werden können. Es sind zwei Fälle möglich.

$$\text{I.} \quad a_1 = 0, \quad y_1 = snu.$$

Die Differentialgleichung nimmt die Form an:

$$2) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + 2k^2\frac{snu\,.\,cnu}{dnu}\frac{dy}{du} = -k_1^2\,.\,y.$$

Ein zweites particuläres Integral hat die Form:

$$3) \qquad y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int p_1 du}du}{sn^2u},$$

$$p_1 = 2k^2\frac{snu\,.\,cnu}{dnu}.$$

Nun ist aber:

$$-\int p_1 du = \log dn^2 u,$$

mithin erhalten wir:

4) $$y_2 = y_1 \int \frac{dn^2 u}{sn^2 u} du = y_1 \int \frac{du}{sn^2 u} - k^2 u \,.\, y_1.$$

Damit ist dieser Fall erledigt.

Zweitens kann gesetzt werden:

$$\text{II.} \quad \alpha_1 = K, \quad y_1 = cn u.$$

Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

5) $$\frac{d^2 y}{du^2} + 2k^2 \frac{sn u \,.\, cn u}{dn u} \frac{dy}{du} = -y.$$

Das zweite particuläre Integral lautet:

$$y_2 = y_1 \int \frac{dn^2 u}{cn^2 u} du,$$

oder also:

6) $$y_2 = y_1 (1 - k^2) \int \frac{du}{cn^2 u} + k^2 y_1 \,.\, u.$$

Im allgemeinen Falle sind nun auch zwei Möglichkeiten vorhanden.

$$\text{I.} \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\alpha_m, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2},$$

$$\text{II.} \quad \alpha_1 = K, \quad \alpha_2 = -\alpha_m, \ldots \alpha_{\mu+1} = -\alpha_{\mu+2}.$$

Im ersten Falle wird:

7) $$y_1 = sn u (sn^2 u - sn^2 \alpha_2) \ldots (sn^2 u - sn^2 \alpha_{\mu+1}).$$

Im allgemeinen Falle lauteten die Bedingungsgleichungen für die Grössen x_r:

$$\frac{(\mu + 1) u_r \,.\, k^2}{1 - k^2 x_r} = \sum\nolimits_l' \frac{u_r + u_l}{x_l - x_r}.$$

In unserem Falle fällt eine der Gleichungen fort, die übrigen nehmen die Form an:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{(\mu + 1) u_r^2 \,.\, k^2}{1 - k^2 x_r} = &\ \frac{1 - 2(1 + k^2) x_r + 3 k^2 x_r^2}{2} \\ &+ 2 \sum\nolimits_l' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{u_r^2}{x_r}, \end{aligned} \right.$$

oder also wir erhalten das System:

8) $$0 = \frac{3 - 2x_r[2 - (\mu - 1) k^3] - k^2 x_r^2 (2\mu - 3)}{2} + 2 \sum' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit sind wir wieder zu einem Gleichungssystem von bekannter Form gelangt und können die Untersuchung abbrechen.

Ein weiteres particuläres Integral wird:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 du} du}{y_1^2},$$

$$p_1 = \frac{(m+1)k^2 snu \, . \, cnu}{dnu}.$$

Nun ist:

$$-\int p_1 \, . \, du = \log dn^{m+1} u,$$

mithin wird:

$$9) \qquad y_2 = y_1 \int \frac{dn^{m+1} u \, . \, du}{sn^2 u (sn^2 u - sn^2 \alpha_2)^2 . \, . (sn^2 u - sn^2 \alpha_{\mu+1})^2}.$$

Entwickeln wir den Ausdruck:

$$\frac{dn^{m+1} u}{sn^2 u (sn^2 u - sn^2 \alpha_2)^2 \ldots (sn^2 u - sn^2 \alpha_{\mu+1})^2} = \frac{dn^{m+1} u}{sn^2 u \, . \, f(x)^2}$$

nach Potenzen von $u - \alpha_r$, so fällt vermöge der Bedingungsgleichungen der Factor von:

$$\frac{1}{u - \alpha_r}$$

fort und umgekehrt zieht das Fortfallen dieses Factors unsere Bedingungsgleichungen nach sich.

In der That, wir können setzen:

$$\frac{1}{sn^2 u \, . \, f(x)^2} = \frac{A_{-2}}{(u - \alpha_r)^2} + \frac{A_{-1}}{u - \alpha_r} + \cdots.$$

$$dn^{m+1} u = dn^{m+1} \alpha_r - (u - \alpha_r)(m+1) k^2 sn\alpha_r \, . \, cn\alpha_r \, . \, dn^m \alpha_r + \cdots$$

Also folgt als Bedingung für das Verschwinden des Coefficienten von $(u - \alpha_r)^{-1}$ die Gleichung:

$$10) \qquad A_{-2} \, . \, (m+1) k^2 sn\alpha_r \, . \, cn\alpha_r - A_{-1} \, . \, dn\alpha_r = 0.$$

Erwägen wir, dass A_{-2} und A_{-1} die Werthe besitzen:

$$A_{-2} = \frac{1}{4 f'(x_r)^2 x_r^2 \, . \, cn^2 \alpha_r \, . \, dn^2 \alpha_r},$$

$$A_{-1} = -\frac{2 f''(x_r) x_r \, . \, cn^2 \alpha_r \, . \, dn^2 \alpha_r + f'(x_r) [3 - 4(1+k^2) x_r + 5 k^2 x_r^2]}{4 f'(x_r)^3 sn^5 \alpha_r \, . \, cn^3 \alpha_r \, . \, dn^3 \alpha_r},$$

so nimmt unsere Gleichung die Form an:

$$11) \qquad \begin{cases} f'(x_r) k^2 (m+1) u_r^2 + 2 f''(x_r) sn^2 \alpha_r \, . \, cn^2 \alpha_r \, . \, dn^4 \alpha_r \\ \qquad + f'(x_r) dn^2 \alpha_r [3 - 4(1+k^2) x_r + 5 k^2 x_r^2]. \end{cases}$$

Damit sind wir zu der früheren Gleichung gelangt.

Unter solchen Umständen können wir den Ansatz machen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dn^{m+1}u}{x.f(x)^2} = c_0 + e_1 \frac{d^2 \log Al_1(u)}{du^2} &+ \sum_2^{\mu+1} e_r \frac{d^2 \log Al_1(u+\alpha_r)}{du^2} \\ &+ \sum_2^{\mu+1} e'_r \frac{d^2 \log Al_1(u-\alpha_r)}{du^2}. \end{aligned}\right.$$

Die Werthe der Constanten sind unmittelbar bestimmt. Damit sind wir am Ziel.

Im zweiten und letzten Falle wird:

$$12) \qquad y_1 = cnu(sn^2u - sn^2\alpha_2) \dots (sn^2u - sn^2\alpha_{\mu+1}).$$

Die Grössen x_r sind aus dem Gleichungssystem bestimmt:

$$\frac{-k^2(\mu+1)u_r^2}{1-k^2x_r} = \frac{1-2(1+k^2)x_r + 3k^2x_r^2}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l} + \frac{u_r^2}{x_r - 1},$$

oder auch:

$$13) \quad 0 = \frac{1 - 2x_r(2 - k^2\mu) - x_r^2.k^2(2\mu - 3)}{2} + 2\sum{}' \frac{u_r^2}{x_r - x_l}.$$

Damit sind wir wiederum zu einem bekannten Gleichungssystem gekommen und können abbrechen.

§ 57.

Specielle Untersuchung derjenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch einen zweiten besitzen.

Als Grundform der in der Ueberschrift näher charakterisirten Differentialgleichungen haben wir in § 42 die Form gefunden:

$$1) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + p_1 \cdot \frac{dy}{du} = p_2 \cdot y,$$

wobei gesetzt ist:

$$p_1 = c_1 + c_2.k^2.sn\beta.snu.sn(u+\beta),$$

$$p_2 = c_3 + c_4.k^2.snu.sn(u+\beta) + c_5.k^2sn^2u.$$

Die Grösse c_2 war der Einheit gleich, ebenso c_5; c_1 bleibt willkürlich, während c_4 und c_3 aus den Gleichungen bestimmt sind:

$$\frac{c_4}{sn\beta} = \frac{cn\beta.dn\beta}{sn\beta} - c_1,$$

$$c_3 = c_1 \frac{cn\beta.dn\beta}{sn^2\beta} - \frac{1}{sn^2\beta}.$$

Die Integrale folgen aus der Gleichung:

$$c_1(1 - k^2 sn^2\beta . sn^2\alpha) = k^2(u . sn^2\beta - sn\beta . cn\beta . dn\beta . sn^2\alpha).$$

Durch Quadrirung ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$2)\quad \begin{cases} k^4 sn^2\beta . sn^4\alpha \\ + (2c_1 . k^2 sn\beta . cn\beta . dn\beta - k^4 sn^4\beta - k^2 c_1^2 . sn^2\beta) sn^2\alpha + c_1^2 = 0. \end{cases}$$

Es ist nun klar, dass der specielle Fall nur dann eintreten kann, wenn die Discriminante dieser quadratischen Gleichung mit der Unbekannten $sn^2\alpha$ verschwindet.

Dieselbe zerfällt, wie man sich leicht überzeugt, in zwei Factoren, sodass wir die beiden Gleichungen erhalten:

$$3)\quad \begin{cases} sn\beta . c_1^2 - 2(cn\beta . dn\beta - 1)c_1 + k^2 . sn^3\beta = 0, \\ sn\beta . c_1^2 - 2(cn\beta . dn\beta + 1)c_1 + k^2 . sn^3\beta = 0. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen stehen mit einander in einem engen Zusammenhang. Die eine entsteht aus der anderen, indem an Stelle von β gesetzt wird:

$$\beta + 2K + 2iK'.$$

Unter Hinzunahme der elliptischen Functionen mit dem Argumente

$$\frac{\beta}{2} = \beta'$$

lassen sich die Wurzeln c_1 der beiden Gleichungen schreiben:

$$4)\quad \begin{cases} c_1 = k^2 sn^2\beta' . sn\beta, \\ c_1 = \dfrac{sn\beta}{sn^2\beta'}, \\ c_1 = - sn\beta \dfrac{dn^2\beta'}{cn^2\beta'}, \\ c_1 = - k^2 sn\beta \dfrac{cn^2\beta'}{dn^2\beta'}. \end{cases}$$

Es giebt also vier und nur vier Werthe von c_1, deren zugehörende Integrale nicht mehr beide doppeltperiodische Functionen sind.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man den folgenden völlig verschiedenen Weg einschlägt.

Ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung hat jedenfalls die Form:

$$5)\quad y_1 = \frac{\vartheta_1(v + a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v},$$

folglich wird ein zweites:

$$6) \qquad y_2 = y_1 \int e^{\mu} \frac{\vartheta_0(v+b)\,\vartheta_0(v)}{\vartheta_1^2(v+a)}\,du,$$

wobei gesetzt ist:

$$\mu = -\left(c_1 + \frac{d\log\vartheta_0(b)}{d\beta}\right)u + 2\,\frac{d\log\vartheta_0(a)}{d\alpha}\,u.$$

Dieses zweite Integral ist keine doppeltperiodische Function mehr, wenn, von Perioden abgesehen, die beiden Gleichungen stattfinden:

$$2a - b = 0,$$

$$c_1 + \frac{d\log\vartheta_0(b)}{d\beta} - 2\,\frac{d\log\vartheta_0(a)}{d\alpha} = 0.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass α vier verschiedene Werthe annehmen kann:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && \alpha = \beta', \\ &\text{II.} && \alpha = \beta' + iK', \\ &\text{III.} && \alpha = \beta' + K + iK', \\ &\text{IV.} && \alpha = \beta' + K. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung bestimmt die dazu gehörenden Werthe von c_1.

Berücksichtigen wir die Gleichung:

$$\frac{d\log\vartheta_0(b)}{d\beta} - 2\,\frac{d\log\vartheta_0(b')}{d\beta'} = -\,k^2 sn\beta\,.\,sn^2\beta',$$

so folgt für $\alpha = \beta'$:

$$c_1 = k^2 sn^2\beta'\,.\,sn\beta,$$

das heisst wir erhalten einen der vorhin gefundenen Werthe von c_1.

Genau so würden sich die drei anderen ergeben. Da diese drei Fälle sich durch Substitutionen einfachster Art aus dem ersten ergeben, so wollen wir uns auf diesen beschränken.

Das zweite particuläre Integral können wir schreiben:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\vartheta_0(v+b)\,\vartheta_0(v)}{\vartheta_1^2(v+b')}\,du,$$

oder also wir erhalten den Werth:

$$7) \qquad y_2 = y_1 \int \left(1 - \frac{1}{k^2 sn^2\beta'\,.\,sn^2(u+\beta')}\right) du.$$

Unter solchen Umständen ergiebt sich der

Lehrsatz: Im speciellen Falle ergiebt sich erstens die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{du^2} + k^2 sn\beta[sn^2\beta' + snu\, sn(u+\beta)]\frac{dy}{du} = p_2 \cdot y,$$

wobei gesetzt ist:

$$p_2 = c_3 + c_4 \,.\, k^2 snu \,.\, sn\,.(u+\beta) + k^2 sn^2 u,$$

$$c_3 = -1 - k^2 + k^2 sn^2\beta - k^2 sn^2\beta' \,.\, cn\beta \,.\, dn\beta$$

$$c_4 = cn\beta \,.\, dn\beta - k^2 sn^2\beta' \,.\, sn^2\beta.$$

Die beiden Integrale lauten:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1(v+b')}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta_0'(b')}{\vartheta_0(b')} v},$$

$$y_2 = y_1 \int \left(1 - \frac{1}{k^2 sn^2\beta' \,.\, sn^2(u+\beta')}\right) du.$$

Die drei andern Ausnahmefälle folgen aus dem soeben betrachteten durch die vorhin näher definirten Substitutionen.

§ 58.

Specielle Untersuchung aller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale denselben zweifachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch einen weiteren besitzen.

Die in der Ueberschrift näher charakterisirten Differentialgleichungen bilden den Gegenstand des 43. Paragraphen. Sie können in die Form gebracht werden:

$$1) \qquad \frac{d^2y}{du^2} + p_1 \cdot \frac{dy}{du} = p_2 \cdot y,$$

$$p_1 = c_1 + c_2 \,.\, k^2 sn\beta \,.\, snu \,.\, sn(u+\beta),$$

$$p_2 = c_3 + c_4 \,.\, k^2 snu \,.\, sn(u+\beta) + c_5 \,.\, k^2 sn^2 u.$$

In dem angegebenen Paragraphen sind die Werthe:

$$c_2 = 1, 2, 3$$

näher untersucht worden, indessen können wir uns nach den dortigen Darlegungen auf die beiden ersten Fälle beschränken. Das soll geschehen. Wir nehmen:

$$\text{I.} \quad c_2 = 1.$$

In diesem Falle ergab sich für die Grösse s_2 eine quadratische Gleichung. Nach einigen leichten Umformungen können wir dieselbe in die Form bringen:

2) $$r_0^2 . s_2^2 + r_1 . s_2 + r_2 = 0,$$

wenn die folgenden Bezeichnungen eingeführt werden:

$$r_0 = 4k^4 sn^4\beta,$$

$$r_1 = -9c_1^4 . sn^4\beta + 36c_1^3 . sn^3\beta . cn\beta . dn\beta - 2c_1^2 . d_2 + 4c_1 . d_3 - d_4,$$

$$r_2 = sn^2\beta(c_1 . s_1 + 2u)^2,$$

$$d_2 = 16sn^2\beta - 22(1 + k^2)sn^4\beta + 27k^2 sn^6\beta,$$

$$d_3 = sn^3\beta . cn\beta . dn\beta(9k^2 sn^2\beta - 4 - 4k^2),$$

$$d_4 = 8k^2 sn^4\beta . cn^2\beta . dn^2\beta + k^4 sn^8\beta.$$

Soll nun einer der Ausnahmefälle eintreten, so muss die Discriminante der Gleichung 2) verschwinden, oder also die Relation bestehen:

3) $$r_1^2 - 4r_0 . r_2 = 0.$$

Es ist das eine Gleichung vom achten Grade mit der Unbekannten c_1. Dieselbe lässt sich zunächst in die beiden Gleichungen vom vierten Grade zerlegen:

4) $$\begin{cases} r_1 - 4k^2 sn^3\beta(c_1 . s_1 + 2u) = 0, \\ r_1 + 4k^2 sn^3\beta(c_1 . s_1 + 2u) = 0. \end{cases}$$

Als Werth von $k^2(c_1 s_1 + 2u)$ ergiebt sich der Ausdruck:

5) $$\begin{cases} 3c_1^3 - 8c_1^2 \frac{cn\beta . dn\beta}{sn\beta} + c_1(-4 - 4k^2 + 7k^2 sn^2\beta) \\ \quad - 2k^2 sn\beta . cn\beta . dn\beta. \end{cases}$$

Es folgt dann leicht, dass die beiden biquadratischen Gleichungen sich in je zwei quadratische Gleichungen zerlegen lassen und zwar die erste in die folgenden:

6) $$\begin{cases} 3c_1^2 - 2sn\beta . c_1 \left(-\frac{4}{sn^2\beta} + \frac{1 + 2k^2 sn^4\beta'}{sn^2\beta'}\right) \\ \quad + k^4 sn^4\beta' . sn^2\beta - 4k^2 sn^2\beta' + 2k^2 sn^2\beta = 0, \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} 3c_1^2 - 2sn\beta . c_1 \left(-\frac{4}{sn^2\beta} + \frac{2 + k^2 sn^4\beta'}{sn^2\beta'}\right) \\ \quad + \frac{sn^2\beta}{sn^4\beta'} - \frac{4}{sn^2\beta'} + 2k^2 sn^2\beta = 0. \end{cases}$$

Die beiden andern Gleichungen erhalten wir, indem wir uns an Stelle von $\beta : \beta + 2K$ gesetzt denken. Hierbei geht der Reihe nach über:

$$sn\beta, \quad cn\beta, \quad dn\beta, \quad sn\beta'$$

in

$$-sn\beta, \; -cn\beta, \quad dn\beta, \quad \frac{cn\beta'}{dn\beta'}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

Lehrsatz: Im Falle $c_2 = 1$ hört ein Integral der Differentialgleichung 1) auf, doppeltperiodisch zu sein, wenn c_1 einer Gleichung achten Grades Genüge leistet. Die Auflösung dieser Gleichung achten Grades kann auf die Auflösung von vier quadratischen Gleichungen zurückgeführt werden. Eine derselben lautet:

$$3c_1^2 - 2sn\beta \,.\, c_1\left(-\frac{4}{sn^2\beta} + \frac{1+2k^2sn^4\beta'}{sn^2\beta'}\right) + k^4sn^2\beta \,.\, sn^4\beta'$$
$$-4k^2sn^2\beta' + 2k^2sn^2\beta = 0.$$

Die drei anderen ergeben sich aus der vorstehenden, indem an Stelle von β gesetzt wird resp.:

$$\beta + 2K,$$
$$\beta + 2iK',$$
$$\beta + 2K + 2iK'.$$

Die Coefficienten c_3, c_4, c_5 haben die früher angegebenen Werthe.

Die wirkliche Auflösung hat keine Schwierigkeit. Das doppeltperiodische Integral ist unmittelbar bestimmt, während das zweite die Form hat:

8) $$y_2 = y_1 \int F(u)\,du,$$

$$F(u) = \frac{\vartheta_0 \,.\, \vartheta_0(v+b)}{\vartheta_0(v)\,\vartheta_0(b)} \; \frac{\vartheta_0^4(v)\,\vartheta_1^2(a_1)\,\vartheta_1^2(a_2)}{\vartheta_0^4 \,.\, \vartheta_1^2(v+a_1)\,\vartheta_1^2(v+a_2)}.$$

Hieraus folgt, dass wir für das zweite Integral auch die Form wählen können:

9) $$y_2 = y_1 \int \left(e_0 + \frac{e_1}{sn^2(u+\alpha_1)} + \frac{e_2}{sn^2(u+\alpha_2)}\right) du,$$

wobei die Grössen e_0, e_1, e_2 leicht bestimmbare Constanten sind.

Wir nehmen jetzt:

$$\text{II.} \quad c_2 = 2.$$

Wir wollen in diesem Falle anders verfahren. Ein Integral der Differentialgleichung hat jedenfalls die Form:

$$10) \qquad y_1 = \frac{\vartheta_1(v+a_1)\vartheta_1(v+a_2)}{\vartheta_0^2(v)} e^{-\Sigma\frac{\vartheta'_0(a_i)}{\vartheta_0(a_i)}v + \lambda u},$$

folglich lautet ein zweites:

$$11) \qquad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 du} du}{y_1^2}.$$

Soll dasselbe aufhören, doppeltperiodisch zu sein, so müssen, von Perioden abgesehen, die Gleichungen bestehen:

$$12) \qquad 2b = 2(a_1 + a_2),$$

$$13) \qquad -c_1 - 2\frac{d\log\vartheta_0(b)}{d\beta} + 2\left[\frac{d\log\vartheta_0(a_1)}{d\alpha_1} + \frac{d\log\vartheta_0(a_2)}{d\alpha_2}\right] = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt als einer der in Betracht kommenden Werthe von $a_1 + a_2$:

$$a = a_1 + a_2 = b.$$

Mit diesem wollen wir weiter operiren. Die zweite Gleichung kann geschrieben werden:

$$2k^2 sn\alpha_1 . sn\alpha_2 . sn\alpha = c_1 + 2\frac{d\log\vartheta_0(b)}{d\beta} - 2\frac{d\log\vartheta_0(a)}{d\alpha},$$

oder also wir erhalten im speciellen Falle:

$$14) \qquad 2k^2 sn\alpha_1 . sn\alpha_2 . sn\beta = c_1.$$

Nun folgt weiter:

$$\alpha_1 = \alpha - \alpha_2,$$

also ergiebt sich:

$$sn\alpha_1(1 - k^2 sn^2\alpha . sn^2\alpha_2) = sn\alpha . cn\alpha_2 . dn\alpha_2 - sn\alpha_2 . cn\alpha . dn\alpha,$$

oder also:

$$sn\beta . u_2 = x_2 . cn\beta . dn\beta + sn\alpha_1 . sn\alpha_2(1 - k^2 sn^2\beta . sn^2\alpha_2).$$

Analog wird:

$$sn\beta . u_1 = x_1 . cn\beta . dn\beta + sn\alpha_1 . sn\alpha_2(1 - k^2 sn^2\beta . sn^2\alpha_1).$$

Durch Quadrirung und nach Fortlassung eines Factors ergiebt sich die quadratische Gleichung:

$$x^2 - (sn^2\beta - 2cn\beta . dn\beta . sn\alpha_1 . sn\alpha_2 + k^2 sn^2\beta . sn^2\alpha_1 . sn^2\alpha_2)x$$
$$+ sn^2\alpha_1 . sn^2\alpha_2 = 0,$$

deren Wurzeln die Grössen x_1 und x_2 sind.

Hieraus ergiebt sich:

$$s_1 = sn^2\alpha_1 + sn^2\alpha_2 = sn^2\beta - 2cn\beta . dn\beta . sn\alpha_1 . sn\alpha_2$$
$$+ k^2 sn^2\beta . sn^2\alpha_1 . sn^2\alpha_2.$$

Andererseits hatten wir aber gefunden:

15) $$k^2 sn\beta . c_4 . s_1 = -4c_1,$$

16) $$c_4 = -2c_1 . sn\beta + 4cn\beta . dn\beta.$$

Die Vergleichung der beiden Werthe von s_1, die wir soeben aufgestellt haben, sowie die Hinzunahme des gefundenen Werthes von $sn\alpha_1 . sn\alpha_2$ ergiebt dann für c_1 die cubische Gleichung:

17) $$\begin{cases} c_1^3 - 6c_1^2 \dfrac{cn\beta . dn\beta}{sn\beta} + 4c_1(-2 - 2k^2 + 3k^2 sn^2\beta) \\ \quad - 8k^2 sn\beta . cn\beta . dn\beta = 0. \end{cases}$$

Damit sind wieder alle Schwierigkeiten gehoben. Alles weitere folgt ganz analog wie im Falle $c_2 = 1$. Wir sehen unter solchen Umständen von der weiteren Durchführung ab.

§ 59.

Specielle Untersuchung derjenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch zwei weitere besitzen.

Wir wenden uns schliesslich zu der Theorie der in der Ueberschrift näher charakterisirten Gleichungen, die für den allgemeinen Fall in § 46 näher untersucht worden sind. Als Form derselben ergab sich:

1) $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{du^2} + [c_1 + c_2 k^2 . sn\beta_1 . snu . sn(u + \beta_1) \\ \qquad + c_3 k^2 . sn\beta_2 . snu . sn(u + \beta_2)] \dfrac{dy}{du} = yp_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = c_4 + c_5 k^2 . sn^2 u + c_6 k^2 . sn\beta_1 . snu . sn(u + \beta_1) \\ \qquad + c_7 k^2 . sn\beta_2 . snu . sn(u + \beta_2). \end{cases}$$

Die beiden Integrale hatten im Allgemeinen die Form:

2) $$y = \frac{\vartheta_1(v + a)}{\vartheta_0(v)} e^{-\frac{\vartheta'_0(a)}{\vartheta_0(a)} v + \lambda u},$$

wobei λ aus der Gleichung bestimmt ist:

3) $$-2\lambda = k^2 sn\beta_1 . sn\alpha . sn(\alpha - \beta_1) + k^2 sn\beta_2 . sn\alpha . sn(\alpha - \beta_2).$$

Wir setzten ferner:
$$\alpha = \omega + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$
und fanden, dass $sn^2\omega$ eindeutig bestimmt ist, sodass die beiden Werthe von α lauten:

$$\alpha_1 = \omega + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

$$\alpha_2 = -\omega + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$$

Hieraus folgt, dass vier specielle Fälle eintreten können:

I. $\omega = 0$,

II. $\omega = K$,

III. $\omega = K + iK'$,

IV. $\omega = iK'$.

Wir begnügen uns, den ersten in Betracht zu ziehen. Für denselben wird:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2};$$

mithin nimmt λ die Form an:

$$2\lambda = k^2(sn\beta_1 - sn\beta_2)\, sn\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\, sn\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \tag{4}$$

während das erste Integral wird:

$$y_1 = \frac{\vartheta_1\left(v + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)}{\vartheta_0(v)}\, e^{-f.v + \lambda u} \tag{5}$$

$$f = \frac{\vartheta'_0\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)}.$$

Mit Hülfe des Additionstheoremes der $\zeta(u)$-Functionen können wir den Exponenten:

$$-f.v + \lambda u$$

auch schreiben:

$$-\left(\frac{\vartheta'_0(b_1)}{\vartheta_0(b_1)} + \frac{\vartheta'_0(b_2)}{\vartheta_0(b_2)}\right)\frac{v}{2}.$$

Das zweite Integral der Differentialgleichung kann in die Form gebracht werden:

$$y_2 = y_1 \int \left(1 - \frac{1}{k^2 sn^2\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\, sn^2\left(u + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)}\right) du. \tag{6}$$

Damit ist die Integration vollkommen durchgeführt. Im allgemeinen Falle war nun die Constante c_4 vollkommen willkürlich, im speciellen dagegen nicht mehr. Wir erhalten ihren Werth etwa auf folgende Weise.

Wir hatten bei den allgemeinen Betrachtungen die Gleichung gefunden: $c'_6 . sn\beta_1 = cn\beta_1 . dn\beta_1 + k^2 sn^2\beta_1 . sn\alpha\, sn(\alpha - \beta_1)$.

Hieraus folgt im speciellen Falle:

$$7)\quad c_6 . sn\beta_1 = cn\beta_1 . dn\beta_1 - k^2 sn\beta_1 . sn\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\, sn\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\, \frac{sn\beta_1 + sn\beta_2}{2}.$$

Ebenso wird:

$$8)\quad c_7 . sn\beta_2 = cn\beta_2 . dn\beta_2 + k^2 sn\beta_2 . sn\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\, sn\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\, \frac{sn\beta_1 + sn\beta_2}{2}.$$

Damit sind die Constanten c_6 und c_7 bestimmt, die Constante c_4 folgt dann etwa aus der Gleichung:

$$9)\qquad \left(c_6 + \frac{sn\beta_2}{sn\beta_1\, sn(\beta_1 - \beta_2)}\right)^2 - \frac{1}{sn^2(\beta_1 - \beta_2)} - c_4 = 0.$$

Hiermit ist auch dieses Problem zu Ende geführt und hiermit schliessen wir die Anwendung des Picard-Floquet'schen Satzes auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Literaturnachweise.

Nr. 1.

In Bezug auf den ersten Theil, der sich auf Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln bezieht, werde auf die folgenden Arbeiten verwiesen, die zum grössten Theile schon im ersten Bande citirt worden sind.

SCHRÖTER: De aequationibus modularibus. Regiomonti 1854.

—— Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen. Breslau 1855.

Diese beiden Arbeiten müssen für die gesammte Theorie als grundlegende angesehen werden.

GORDAN: Beziehungen zwischen Theta-Producten. Crelle Journal, Band 66.

GÖRING: Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben. Math. Ann. 7.

HERSTOWSKI: Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen. Math. Ann. 11.

HOPPE: Verallgemeinerung einer Relation der Jacobi'schen Functionen. Hoppe. Archiv 70.

KRAUSE: Zur Transformation der elliptischen Functionen. Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1886.

—— Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. 27.

MÖLLER: Zur Transformation der Thetafunctionen. Rostock 1887.

MERTENS: Ueber eine Verallgemeinerung der Schröter'schen Multiplicationsformeln für Thetareihen. Programm Gymn. Köln 1889.

In dieser Arbeit wird u. A. die Multiplicatorgleichung für die Transformation fünften Grades aufgestellt.

BOCKHORN: Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Jacobi'schen Moduln. Solingen 1891.

HÜBNER: Ueber die Umformung unendlicher Reihen und Producte mit Beziehung auf elliptische Functionen. Königsberg. Programm des Kneiphöfischen Gymnasiums 1891.

PRYM und KRAZER: Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Leipzig 1892.

KRAUSE: Zur Transformation der Thetafunctionen. Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1893 und 1896.

Bei der Darstellung der Transformationstheorie habe ich mich auf die Fälle $h = 1$ und $h = \frac{1}{2}$ beschränkt. Wie bemerkt, geschieht dasselbe, weil in diesen

Fällen die Beziehungen zu den transformirten Functionen sich ganz besonders einfach gestalten. Es ist aber zweifellos, dass bei einer weiteren Ausdehnung der Theorie auch die allgemeinen rationalen Werthe von h hinzugenommen werden müssen. Das entsprechende Additionstheorem bietet keinerlei neue Gesichtspunkte und Schwierigkeiten dar. Es lautet:

Leisten die ganzen Zahlen a den Gleichungen Genüge:

$$\mu_1 a_{\varepsilon 1}^2 + \mu_2 a_{\varepsilon 2}^2 + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n}^2 = r^2 . m_\varepsilon,$$

$$\mu_1 a_{\varepsilon 1} a_{\sigma 1} + \mu_2 a_{\varepsilon 2} a_{\sigma 2} + \cdots \mu_n a_{\varepsilon n} a_{\sigma n} = 0,$$

so gilt das Additionstheorem:

$$c . \prod \vartheta_3 (v_\varepsilon, \mu_\varepsilon \tau) = \sum \prod \vartheta_3 \left[\frac{g_\varepsilon}{r} \right] (w_\varepsilon + \eta_\varepsilon, m_\varepsilon \tau),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$r . w_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} v_1 + a_{\varepsilon 2} v_2 + \cdots a_{\varepsilon n} v_n,$$

$$r . \eta_\varepsilon = a_{\varepsilon 1} \eta'_1 + a_{\varepsilon 2} \eta'_2 + \cdots a_{\varepsilon n} \eta'_n,$$

$$g_\varepsilon \equiv a_{\varepsilon 1} \mu_1 s_1 + a_{\varepsilon 2} \mu_2 s_2 + \cdots a_{\varepsilon n} \mu_n s_n \mod r\, m_\varepsilon.$$

Die Grössen η'_ε können die Werthe $0, 1, \ldots r - 1$ annehmen. Die Summen und Producte sind in bekannter Weise zu erstrecken. c ist eine leicht bestimmbare Constante.

Daneben haben Prym und Krazer die Transformationstheorie auf Grund von Additionstheoremen zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln insofern erweitert, als sie ganz allgemein den Fall in Betracht ziehen, dass die Transformationszahlen, die von uns stets als ganze Zahlen angenommen worden sind, beliebige gebrochene Zahlen sind. Es hätte nahe gelegen, diese Verallgemeinerung mit in Betracht zu ziehen, indessen habe ich doch geglaubt, davon absehen zu sollen, um den genannten Autoren die systematische Entwickelung ihrer Ideen zu überlassen. In Bezug auf den letzten Punkt werde noch verwiesen auf:

Krazer: Ueber ein specielles Problem der Transformation der Thetafunctionen. Crelle Journal, Band 111.

—— Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Math. Ann. 43.

—— Die quadratische Transformation der Thetafunctionen. Math. Ann. 46.

Nr. 2.

Die hier gegebene Darstellung für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution ist die bekannte Cayley'sche. Weitergehende Theorien finden sich in Arbeiten von Voss, Frobenius, Kronecker u. a.

Nr. 3.

In Bezug auf die Literatur über die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen in trigonometrische Reihen bemerken wir das Folgende:

Die doppeltperiodischen Functionen zerfallen in solche der ersten, zweiten und dritten Art, demgemäss wird sich auch die Literatur nach diesen drei Richtungen hin erstrecken. Hierbei ist aber zu bemerken, dass eine strenge Sonderung nicht durchweg stattfindet, da Methoden, die für die Functionen erster Art aufgestellt sind, zum Theil auch für die Functionen zweiter und dritter Art bestehen bleiben und umgekehrt.

Die Entwickelung der einfachsten Functionen erster Art rührt von Jacobi her. In Bezug auf dieselbe möge auf die Lehrbücher verwiesen sein, die im ersten Bande citirt worden sind. Daneben werde verwiesen auf:

SCHLÖMILCH: Ueber die Entwickelung der elliptischen Functionen. Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Band 2.

HERMITE: Note sur la théorie des fonctions elliptiques. Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral par Lacroix. Paris 1874.

BIEHLER: Sur les fonctions doublement périodiques considerées comme des limites de fonctions algébriques. Crelles Journal. Band 88.

In dieser Arbeit werden die Productentwickelungen der Thetafunctionen eingeführt. Die Thetaquotienten werden mit Hülfe eines Grenzüberganges auf Grund der Partialbruchzerlegung gebrochener Functionen in trigonometrische Reihen entwickelt. Die Methode genügt auch für Kategorien von Functionen dritter Art.

APPELL: Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonometrique des fonctions elliptiques. Bulletin de la Société Mathématique de France. Tome XIII.

In dieser Arbeit wird das genannte Problem auf die Auflösung eines linearen Gleichungssystemes zurückgeführt.

POINCARÉ: Remarques sur l'emploi de la méthode précédente. Ibidem.

DE PRESLE: Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonometriques. Bulletin de la Société Mathématique de France. Tome XIV.

CHARLIER: Om utvecklingen af dubbelperiodiska funktioner i Fourierska serier. Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1887.

GLAISHER: On the series which represent the twelve elliptic and the four Zeta functions. The Messenger of Mathematics (2), XVIII.

TEIXEIRA: Sobre as funcções ellipticas. Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publ. pelo Dr. F. G. Teixeira. IX

In Bezug auf die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter Art ist Folgendes zu bemerken. Als Grundfunctionen derselben dienen die Ausdrücke:

$$\frac{\vartheta_\alpha\,(v+a)}{\vartheta_\beta\,(v)}.$$

Die Entwickelung derselben in trigonometrische Reihen rührt von Jacobi her. Seine Ausführungen befinden sich in den Arbeiten: „Sur la rotation d'un corps" im zweiten Bande seiner gesammelten Werke. Daneben ist zu verweisen auf:

SCHEIBNER: Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. Leipzig 1879. Supplement dazu, Leipzig 1880.

HERMITE: Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Annales de l'École normale (3), II.

LIPSCHITZ: Sur la théorie des fonctions elliptiques. Ibidem.

LERCH: Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonometrique de quelques fonctions elliptiques. Acta Mathematica, XII.

TEIXEIRA: Sobre as funcções duplamente periodicas de segunda espece. Jornal de Sciencias Math. e Astr. publ. pelo Teixeira, IX.

Daneben werde auf die Arbeiten des Verfassers und Mohrmanns hingewiesen, die in der Folge citirt werden.

Wenden wir uns zu den Functionen dritter Art, so ist zu bemerken, dass einzelne schon von Jacobi behandelt worden sind und zwar sind es die Functionen:

$$\frac{1}{\vartheta_\alpha(v)}.$$

Als eigentlicher Begründer der Theorie muss Hermite angesehen werden. Es waren zahlentheoretische Fragen, die ihn zu seinen Entwickelungen führten. Die bezüglichen Arbeiten sind:

Lettre de M. Hermite à M. Liouville. Comptes rendus 1861.

Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique. Comptes rendus 1862.

Die Arbeiten finden sich auch im Liouville'schen Journal de Mathématiques und zwar unter folgendem Titel:

Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique (2), VII.

Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques (2), IX.

In diesen Arbeiten wird ohne Beweis die Entwickelung einer grösseren Anzahl von Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen gegeben und zwar sind dieselben von der Form:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v)\,\vartheta_\beta(v)}{\vartheta_\gamma(v)},\quad \frac{\vartheta_\alpha^2(v)}{\vartheta_\beta(v)},\quad \frac{\vartheta_\alpha^2(v)\,\vartheta_\beta(v)}{\vartheta_\gamma^2(v)}.$$

Daneben hat aber Hermite auch die Function:

$$\chi_\mu(z,\alpha)=\frac{\pi}{2K}\sum e^{\frac{\mu n\pi\alpha i}{K}}\,q^{\mu n(n-1)}\operatorname{cotang}\frac{\pi}{2K}(z-\alpha-2ni K')$$

gekannt, die Appell seinen Untersuchungen über den genannten Gegenstand zu Grunde legt. Es geht dieses aus mündlichen Mittheilungen von Hermite an Appell (nach Druck der Appell'schen Arbeit aus dem Jahre 1884) hervor, daneben finden sich hierauf bezügliche Formeln in einer Hermite'schen Arbeit in dem Sammelwerke: In memoriam Domenici Chelini Collectanea Mathematica. Milan 1881.

Die Hermite'schen Entwickelungen aus den Jahren 1861 und 1862 wurden im Jahre 1879 von Biehler wieder aufgenommen und zwar in seiner These: Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. In derselben wird nach Methoden von Liouville, Hermite und Briot und Bouquet die Entwickelung einer überaus grossen Anzahl von Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen in eleganter und übersichtlicher Weise gegeben. Die Arbeit von Biehler ist bei den Darlegungen des Verfassers vielfach benutzt worden. Immerhin enthält die Arbeit von Biehler nur eine grössere Beispielsammlung. Die methodische, systematische Lösung des Problemes, die sämmtlichen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen zu entwickeln, findet sich in den Arbeiten von Appell vor.

Die in Betracht zu ziehenden Arbeiten Appells haben die Titel:

Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Comptes Rendus, Tome 97.

Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Annales de l'École normale (3), Tome 1 und 3.

Application du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Annales de l'École normale (3), Tome 2.
Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Comptes Rendus 101.
Développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Annales de l'École normale (3), Tome 2.

Eine überaus elegante und einfache Darstellung der Appell'schen Resultate findet sich in dem Werke von Halphen über elliptische Functionen und zwar im ersten Bande desselben.

An die Appell'schen Arbeiten knüpfen die Arbeiten des Verfassers und Mohrmanns an und zwar ist in ihnen der Versuch gemacht, den Zusammenhang mit der Transformationstheorie herzustellen und andere Grundfunctionen, die eine gemeinsame Theorie der Functionen zweiter und dritter Art ermöglichen, zu benutzen. Die Titel der betreffenden Arbeiten lauten:

Krause, Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. Math. Ann. 30, 33.
Krause, Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art in trigonometrische Reihen. Math. Ann. 35.
Krause und Mohrmann: Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. Math. Ann. 32.
Mohrmann: Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der doppeltperiodischen Functionen dritter Gattung. Leipzig, Teubner 1889.
—— Neues Verfahren der Fourier'schen Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen. Archiv der Mathematik und Physik von Hoppe (2) 12. 1894.

Daneben werde verwiesen auf:

Teixeira: Estudo sobre as funcções duplamente periodicas de terceira espece. Coimbra 1890.
Lerch: Bemerkungen zur Theorie der elliptischen Functionen. Rozpravy ceské Akademie cisaře etc. Prag. I. Nr. 24. 1892.

Die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen dritter Art ist aus zahlentheoretischen Problemen hervorgegangen und verdankt diesen wie auch die Entwickelung der gewöhnlichen elliptischen Functionen einen grossen Theil ihrer Bedeutung. Es hätte daher nahegelegen, in dem vorliegenden Werke auf die zahlentheoretischen Anwendungen näher einzugehen. Der Verfasser hat aber dennoch geglaubt, davon absehen zu sollen, da die letzteren ungemein reichhaltig sind und ihre Darlegung zu weit von den eigentlichen Theorien abgeführt hätte. An dieser Stelle möge nur auf einige besonders naheliegende und einfache Kategorien von Anwendungen hingedeutet werden, indem in Bezug auf alles Nähere auf Arbeiten von Jacobi, die schon citirten von Hermite, Biehler, Appell und die folgenden verwiesen wird:

Hermite: Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, Tome 29. Acta math. Band 5.
Nazimow: Sur quelques applications de la théorie de fonctions elliptiques à la théorie des nombres. Annales de l'École normale. (3) V. 1888.

Die erste Anwendung bringen wir in der Darstellung von Hermite und mit dessen Bezeichnungen.

Setzen wir
$$z = \frac{2Kx}{\pi}$$
und definiren:

$$1)\quad \begin{aligned}
\Theta(z) &= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots,\\
H(z) &= 2q^{\frac{1}{4}}\sin x - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x + \cdots,\\
\Theta_1(z) &= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots,\\
H_1(z) &= 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + \cdots,
\end{aligned}$$

so kann der Ausdruck:
$$2)\quad \frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}$$
auf doppeltem Wege hergestellt werden. Erstens ist er das Product der beiden Factoren:
$$\frac{H(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} \quad \text{und} \quad \frac{H(z)}{\Theta(z)}.$$

Für den ersten Factor gilt die Entwickelung:
$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\frac{H(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sin x\,.\,q^{\frac{1}{4}} + \sin 3x\,.\,q^{\frac{9}{4}}(1+2q^{-1}) + \sin 5x\,.\,q^{\frac{25}{4}}(1+2q^{-1}+2q^{-4}) + \cdots$$
$$= \sum \sin(2n+1)x\,.\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}}\sum q^{-m^2}.$$
wobei m die Werthe $0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots \pm n$ annehmen muss.

Für den zweiten Factor ist:
$$\frac{\sqrt{kK}}{\pi}\,\frac{H(z)}{\Theta(z)} = 2\sin x\cdot\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q} + 2\sin 3x\cdot\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3} + 2\sin 5x\cdot\frac{q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5} + \cdots$$

Multipliciren wir die beiden Reihen, so erhalten wir die Darstellung des Ausdrucks:
$$\frac{K}{2\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\,\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}.$$

Es genügt für unsere Zwecke die Kenntniss des constanten Gliedes. Dasselbe wird:
$$A = \sum \frac{q^{\frac{2n+1}{2}+\frac{(2n+1)^2}{4}}}{1-q^{2n+1}}\left(1+2q^{-1}+2q^{-4}+\cdots 2q^{-n^2}\right)$$
oder also:
$$A = \sum q^{\frac{2n+1}{4}(2n+1+4b+3)-m^2},$$

wobei die Summe nach n und b über alle positiven ganzen Zahlen — Null einbegriffen — zu erstrecken ist, nach m über alle Zahlen:
$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots \pm n.$$

Wir können demnach A auch in die folgende Form bringen:

$$A = \sum F(N) q^{\frac{1}{4}N},$$

wobei gesetzt ist:

$$N = (2n+1)(2n+4b-3) - 4m^2 \equiv 3 \mod 4$$

und $F(N)$ angiebt, wie oft die letzte Gleichung für einen Werth von N stattfindet, wobei n, m, b die vorhin angegebenen Werthe annehmen können.

Zweitens können wir den Ausdruck 2) auch als Product der beiden Factoren ansehen — von einer Constanten abgesehen —

$$\Theta_1(z) = 1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + \cdots,$$

$$\frac{kK^2}{2\pi^2} \frac{H^2(z)}{\Theta^2(z)} = \sum \frac{nq^2}{1-q^{2n}} - \cos 2x \frac{q}{1-q^2} - \cos 4x \frac{2q^2}{1-q^4} \cdots$$

Demgemäss ergiebt sich zweitens:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\, A = \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \sum \frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}}.$$

Setzen wir:

$$\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} = \sum \Phi_1(n) q^n,$$

$$\sum \frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}} - \sum \Psi_1(n) q^n,$$

so stellt $\Phi_1(n)$ die Summe aller Divisoren von n dar, deren conjugirte Theiler ungerade sind, $\Psi_1(n)$ die Summe aller Theiler kleiner als $\sqrt{n}$, die nach dem Modul 2 verschieden sind von ihrem conjugirten.

Die Vergleichung der beiden Ausdrücke ergiebt:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} \sum F(N) q^{\frac{1}{4}N} = \sum [\Phi_1(n) - \Psi_1(n)] q^n$$

oder also, da:

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = H_1 \text{ ist:}$$

$$F(4n-1) + F(4n-9) + \cdots F[4n-(2a+1)^2] = \Phi_1(n) - \Psi_1(n).$$

Das ist eine zahlentheoretische Beziehung, die sich als unmittelbare Folge unserer trigonometrischen Darstellungen ergiebt. Dieselbe erhält eine ganz besondere Bedeutung durch eine andere Deutungsweise der Grössen $F(N)$. Es zeigt sich, dass $F(N)$ die Anzahl der Classen der eigentlich primitiven quadratischen Formen von der Determinante N ist.

Eine zweite Kategorie von Anwendungen möge durch das folgende Hermite'sche Beispiel angedeutet werden.

Es gelten die Entwickelungen:

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \frac{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \sum \frac{4q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin(2n+1)x,$$

$$\vartheta_2 \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \frac{1}{\sin x} + 4\sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \cdots q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right) \sin(2n+1)x.$$

Nun multipliciren wir die rechten und die linken Seiten mit einander und integriren zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, indem wir von den Formeln Gebrauch machen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es ergiebt sich dann:

$$\vartheta_2^{\,2}.\,\vartheta_3 = 4S + 8S_1,$$

wobei gesetzt ist:

$$S = \sum \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}},$$

$$S_1 = \sum \frac{q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)}}{1-q^{2n+1}} \left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \cdots q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Diese Ausdrücke können nach Potenzen von q entwickelt werden. Es ergiebt sich:

$$S = \sum q^{\frac{1}{2}aa'},$$

wobei a und a' die ganze Reihe der positiven ungeraden Zahlen durchlaufen.

Setzt man fest, dass a'' die Werthe annimmt:

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ a-2$$

so wird:

$$S_1 = \sum q^{\frac{1}{4}(a^2 + 2aa' - a''^2)}.$$

Bezeichnen wir also durch N eine beliebige ungerade positive Zahl und durch $\Phi(N)$ die Zahl ihrer Theiler, so können wir setzen:

$$S = \sum \Phi(N) q^{\frac{1}{2}N}.$$

Ferner können wir schreiben:

$$a^2 + 2aa' - a''^2 = 2N.$$

Dann wird:

$$S_1 = \sum \Phi_1(2N) q^{\frac{1}{2}N},$$

wobei $\Phi_1(2N)$ angiebt, wie oft die Gleichung:

$$a^2 + 2aa' - a''^2 = 2N (N \text{ ungerade})$$

für einen Werth von N unter den angegebenen Bedingungen stattfindet. Demgemäss wird:

$$\vartheta_2^{\,2}.\,\vartheta_3 = 4\sum [\Phi(N) + 2\Phi_1(2N)] q^{\frac{1}{2}N}$$

Es sind auf diesem Wege die Coefficienten in der Entwickelung von $\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_3$ durch zahlentheoretische Ausdrücke dargestellt worden. Auch hier kann den

Coefficienten eine ungleich wichtigere Deutung gegeben werden. Es zeigt sich, dass

$$\Phi(N) + 2\Phi_1(2N)$$

gleich unserer Function $F(2N)$ ist oder also wir erhalten die wichtige Darstellung:

$$\vartheta_2^2 \cdot \vartheta_3 = 4\sum_0^\infty F(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}}.$$

Eine dritte und letzte Anwendung, auf die wir hindeuten, bezieht sich auf die Zahl der Lösungen gewisser unbestimmter quadratischer Gleichungen, eine Anwendung, auf die zuerst Jacobi hingewiesen hat. Derartige Sätze finden sich in grosser Zahl in Arbeiten von Liouville von anderen Gesichtspunkten aus aufgestellt vor. Wir nehmen ein besonders naheliegendes Beispiel nach Nazimoff.

Einerseits ist:

$$\vartheta_3(0,\tau)\vartheta_3(0,2\tau) = \sum\sum q^{x^2+2y^2} = A,$$

andererseits gilt die Entwickelung:

$$\frac{2K}{\pi} : sn\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{sin x} + 4\sum\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} sin(2n-1)x$$

$$= \frac{1}{sin x} + 4\sum_1^\infty q^n \sum_{n=(2d-1)\delta} sin(2d-1)x.$$

Setzen wir $x = \frac{\pi}{4}$ in dieser Formel ein, so ergiebt sich unter Berücksichtigung bekannter Beziehungen:

$$A = 1 + 2\sqrt{2}\sum_1^\infty q^n \sum_{n=(2d-1)\delta} sin(2d-1)\frac{\pi}{4}$$

oder also:

$$A = 1 - 2\sum q^n \sum_{n=(2d-1)\delta}(-1)^{\frac{1}{2}(d^2+d)}.$$

Mithin erhalten wir das Resultat:

Die halbe Zahl der Lösungen der Gleichung:

$$x^2 + 2y^2 = n$$

ist gleich der Zahl der Theiler von n, welche die Form $8p+1$ oder $8p+3$ haben, vermindert um die Zahl der Theiler von n, welche die Form $8p+5$ oder $8p+7$ haben.

Nr. 4.

Da die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen hier nur als allgemeine Einleitung in die speciellen Picard'schen Differentialgleichungen dienen und die Stellung und Bedeutung derselben fixiren soll, so habe ich mich auf die grundlegenden und ersten Sätze aus derselben beschränkt, deretwegen auf die bekannten fundamentalen Arbeiten von Fuchs und Frobenius im Crelle'schen

Journal zu verweisen ist. Eine lichtvolle Darstellung dieser Untersuchungen finde sich in der Arbeit von Tannery:

Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables. Annales de l'École normale (2), IV.

Daneben werde verwiesen auf den Convergenzbeweis von Kneser im 47. Bande des Crelle'schen Journals.

Von Lehrbüchern heben wir die folgenden hervor:

Craig: A Treatise on linear differential equations. New-York 1889.

Heffter: Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen etc. Leipzig 1894.

Picard: Traité d'analyse. Paris 1896. Band III.

Schlesinger: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig 1895, 1897.

Nr. 5.

Die hier entwickelte Methode, Differentialgleichungen zu construiren, denen doppeltperiodische Functionen Genüge leisten, findet sich in der Arbeit des Verfassers:

Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der doppeltperiodischen Functionen dritter Art. Berichte der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1889.

Daneben werde verwiesen auf:

Brioschi: Sopra una classe di equazioni differenziali integrabili per funzioni ellittiche. Atti della Accademia Reale dei Lincei (3), IV.

—— Sulla generazione di una classe di equazioni lineari integrabili per funzioni ellittiche. Annali di matematica. Milano (2), X.

Fuchs: Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques. Journal de mathématiques (3), IV.

Auf diese wichtige Arbeit von Fuchs wird noch besonders eingegangen werden. Es möge hierbei allgemein bemerkt werden, dass die citirten Arbeiten mehrfach in mehrere der hier gewählten Kategorien eingereiht werden können, ohne dass es jedes Mal besonders hervorgehoben wird.

Nr. 6.

In Bezug auf die allgemeine Theorie der Picard'schen Differentialgleichungen ist zu bemerken, dass dieselbe aus den Hermite'schen Arbeiten, insbesondere denen über die Lamé'sche Differentialgleichung (siehe später) und den Fuchs-schen Arbeiten über lineare Differentialgleichungen hervorgegangen ist.

Als Begründer derselben ist Picard anzusehen. Die von ihm herrührenden, in Betracht gezogenen Arbeiten sind die folgenden:

Sur une généralisation des fonctions périodiques et sur certaines équations différentielles linéaires. Comptes rendus 89.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Comptes rendus 90.

Sur une classe d'équations différentielles linéaires. Comptes rendus 90.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Crelle, Journal, Band 90.

Daneben werde verwiesen auf:

Mittag-Leffler: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Comptes rendus 90.

Nr. 7.

In Bezug auf die Lamé'sche Differentialgleichung ist Folgendes zu bemerken:

Aufgaben aus der Wärmetheorie führten Lamé zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die unter Benutzung der Bezeichnungsweise der Theorie der elliptischen Functionen geschrieben werden kann:

$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)k^2 sn^2 u + h]y. \quad (n \text{ eine ganze positive Zahl.})$$

Die Arbeiten von Lamé finden sich in mannigfachen Journalen. Wir begnügen uns damit, drei selbstständige Werke von ihm zu nennen:

Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes Paris 1857.

Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris 1859.

Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Paris 1861.

Es gelang Lamé, ein Integral dieser Differentialgleichung zu finden, wenn h in geeigneter Weise gewählt wird.

Liouville und unabhängig von ihm Heine haben für dieselben Werthe von h das zweite Integral bestimmt. Die Arbeiten von Liouville sind betitelt:

Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde adressées à M. P. A. Blanchet. Liouville, Journal. Tome XI.

Solution d'un problème relatif à l'ellipsoïde. Comptes rendus 20. 1845.

Von den Arbeiten von Heine begnügen wir uns damit, eine Arbeit im 29. Bande des Crelle'schen Journals zu citiren:

Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme,

und verweisen im Uebrigen auf sein bekanntes Lehrbuch über Kugelfunctionen.

An diese Arbeiten knüpft Hermite an. Er lässt die bisherigen Beschränkungen von h fallen und sucht für einen jeden ganzen positiven Werth von n die beiden Integrale der Differentialgleichung zu bestimmen.

Die Arbeiten von Hermite befinden sich in einer Reihe von Bänden der Comptes rendus der Pariser Akademie der Wissenschaften, sind dann aber zusammengefasst in dem Werke:

Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris 1885.

Daneben werde auf die Arbeit aufmerksam gemacht:

Sur l'équation de Lamé. Annali di Matematica. Milano. Tomo IX,

und auf die Vorlesungen, die er im Jahre 1872 an der École Polytechnique gehalten hat, ferner auf die Arbeit:

Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. Crelle 89. In dieser Arbeit wird der specielle Fall $k^2 = 1$ untersucht.

In den beiden zuletzt citirten Arbeiten wird eine Darstellung der Integrale in der Productform gegeben – in dem vorher citirten Werke in der Summenform.

Gleichzeitig mit Hermite hat Fuchs sich mit dem Problem der Auflösung der Lamé'schen Gleichung beschäftigt, indem er die von ihm aufgestellten Methoden

anwandte. Seine Arbeiten, die auch als grundlegende zu bezeichnen sind, sind die folgenden:

Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Crelle, Journal, Band 81.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Comptes rendus 85.

Ueber eine Classe von Differentialgleichungen, welche durch Abel'sche oder elliptische Functionen integrirbar sind. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen 1878. (Siehe auch Annali di matematica (2), IX.)

Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques. Journal de mathématiques (3), IV.

Neben den Arbeiten von Hermite und Fuchs sind ferner Arbeiten von Brioschi hervorzuheben, der sich vielfach mit Differentialgleichungen beschäftigt hat, die zu Picard'schen Gleichungen führen. Wir heben für den Fall der Lamé'schen Gleichung die Arbeiten hervor:

Sur l'équation de Lamé. Comptes rendus 85 und 86.

Théorèmes relatifs à l'équation de Lamé. Comptes rendus 92.

In dieser Arbeit wird u. A. die Productdarstellung mit der Summendarstellung der Integrale verglichen und die Relation zwischen den entsprechenden Argumenten angegeben, die auch bei unseren Untersuchungen näher betrachtet worden ist.

Sur une application du théorème d'Abel. Comptes rendus 94.

Sur l'équation différentielle Lamé-Hermite. Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersburg (3), 35.

Ausserdem werde auf die folgenden Arbeiten aufmerksam gemacht:

Stenberg: Den Hermiteska differential-equationen af andra ordningen. Acta societatis Fennicae. Helsingfors XVI.

Greenhill: Lamé's differential equation. Proceedings of the London Math. Society XX.

Chittenden: A presentation of the theory of Hermite's form of Lamé's equation with a determination of the explicit forms in terms of the $\wp$-function for the case n equal to three. Dissertation. Königsberg-Leipzig 1893.

In diesen drei Arbeiten wird von den Weierstrass'schen Functionen Gebrauch gemacht, desgleichen in der Arbeit von

Klein: Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung. Mathem. Annalen 40, in welcher eine Untersuchung der Wurzeln der algebraischen Gleichung stattfindet, welcher die p-Functionen Genüge leisten. (Siehe auch desselben Verfassers autographirte Vorlesungshefte.)

Ferner werde die Arbeit von Pick genannt:

Ueber die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung. Sitzungsberichte der math. naturw. Classe der Akademie zu Wien 1896, in welcher eine Anwendung der Methoden der Invariantentheorie gegeben wird.

Endlich verweisen wir auf die Arbeit von

Markoff: Sur l'équation de Lamé. Mathem. Annalen 47, welche sich an die citirte Arbeit von Klein anschliesst.

In den Ausführungen dieses Werkes ist die in der Lamé'schen Differentialgleichung vorkommende Zahl n immer als ganze Zahl angenommen worden, es

möge aber hervorgehoben werden, dass sich in der Literatur der Fall eines nicht ganzen n mehrfach behandelt findet. Wir nennen die folgenden Arbeiten:

Brioschi: Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Annali di Matematica (2), IX.

Hermite: Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Ibidem (2), X.

Lindemann: On Lamé's differential equation. Reports of the Meeting of the British Association for the advancement of science. London 1883.

Jamet: Sur un cas particulier de l'équation de Lamé. Comptes rendus 111.

Brioschi: Gli integrali algebrici dell' equazione di Lamé. Atti della Reale Acc. dei Lincei. Rendiconti (5), I_2.

Nr. 8.

In Bezug auf die Theorie der Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Ausschluss der Lamé'schen machen wir ausser auf die Hermite-schen Arbeiten auf die folgenden aufmerksam:

Picard: Sur une application de la théorie des fonctions elliptiques. Comptes rendus 89.

In dieser Arbeit wird die Differentialgleichung behandelt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + nk^2\frac{snx\,cnx}{dnx}\,\frac{dy}{dx} + ay = 0,$$

die von uns ausführlich untersucht worden ist.

Auf einen besonderen Fall dieser Gleichung bezieht sich eine Arbeit von

Gyldén: Sur une nouvelle forme des coordonnées dans le problème des deux corps. Comptes rendus 88.

Auf dieselbe allgemeine Gleichung bezieht sich eine Arbeit von

Bremer: Ueber lineare homogene Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Dissertation. Giessen, in welcher nach Fuchs'schen Methoden auch die Lamé'sche Differentialgleichung behandelt wird.

Gyldén: Sur une équation différentielle linéaire du second ordre Comptes rendus 90.

—— Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. Ibidem.

Discussion der Gleichung:

$$y'' + k^2\frac{snx\,.\,cnx}{dnx}\,y' + \mu^2 dn^2x\,.\,y = 0.$$

Darboux: Sur une équation linéaire. Comptes rendus 94.

Discussion der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\mu(u+1)}{sn^2x} + \frac{\mu'(\mu'+1)}{cn^2x}\,dn^2x + \frac{\mu''(\mu''+1)}{dn^2x}\,k^2cn^2x + n(n+1)k^2sn^2x + h\right]y.$$

De Sparre: Sur l'équation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(2\nu\frac{k^2snx\,.\,cnx}{dnx} + 2\nu_1\frac{snx\,dnx}{cnx} - 2\nu_2\frac{cnx\,dnx}{snx}\right)\frac{dy}{dx} = yR,$$

$$R = \frac{1}{sn^2x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1) + \frac{dn^2x}{cn^2x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1) + \frac{k^2cn^2x}{dn^2x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)$$

$$+ k^2sn^2x(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1) + h.$$ Acta math. 3.

Der Titel ist etwas modificirt. Diese Arbeit, die sich durch grosse Allgemeinheit und Eleganz der Methoden auszeichnet, ist in dem vorliegenden Werke mehrfach benutzt worden.

ELLIOT: Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques. Acta math. 2.

Discussion der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\left(n(n+1)k^2\lambda^2(z)+h+\frac{m(m+1)}{\lambda^2(z)}\right)y.$$

Hierzu kommen einige Arbeiten des Verfassers, die sich in den Berichten der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften finden.

Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten 1890; II, 1890; III, 1890; IV, 1891; V, 1891.

In diesen Arbeiten werden einige Differentialgleichungen nach einheitlicher Methode, wie sie im Vorhergehenden auseinandergesetzt ist, integrirt, und zwar unter Zugrundelegung der Productform der Integrale.

NAETSCH: Ueber eine gewisse Classe von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich durch doppeltperiodische Functionen zweiter Art integriren lassen. Ibidem 1893.

—— Zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Dissertation, Leipzig 1894.

In diesen Arbeiten werden die Untersuchungen des Verfassers weitergeführt und eine allgemeine Methode zur Integration derjenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelt, die in den Coefficienten zwei beliebige singuläre Stellen besitzen.

Dasselbe Problem ist auch in dem vorliegenden Werke gelöst worden und zwar in anderer Weise, als es in den Arbeiten von Naetsch geschieht.

NAETSCH: Untersuchungen über die Reduction und Integration von Picard'schen Differentialgleichungen. Berichte der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften 1896.

In dieser Arbeit wird eine allgemeine Methode zur Auflösung der geraden Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gegeben.

BRIOSCHI: Sur une classe d'équations linéaires. Comptes rendus 91.

Es möge hier an dieser Stelle, obwohl der Zusammenhang nur ein loser ist, auf eine Arbeit von Gegenbauer hingewiesen werden:

Ueber die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art. Sitzungsberichte der Akademie zu Wien 1882. Math. naturw. Classe 86. II.

Diese Arbeit knüpft an die bei Gelegenheit der Lamé'schen Gleichung citirte Arbeit von Brioschi, Comptes rendus 92 an und verallgemeinert die dort gegebene Beziehung für eine beliebige doppeltperiodische Function zweiter Art.

Endlich möge nochmals auf die schon citirte Arbeit von Fuchs aufmerksam gemacht werden:

Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques. Journal de Mathématiques. (3) 4,

in welcher die Theorie der Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ganz allgemein behandelt wird. Bei der grossen Einfachheit und fundamentalen

Wichtigkeit der Fuchs'schen Untersuchungen mögen dieselben kurz charakterisirt werden.

Die in Betracht kommenden Differentialgleichungen müssen jedenfalls die Form haben:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p_1 \frac{du}{dx} + p_2 u = 0,$$

wobei in der Umgebung eines singulären Punktes a die Entwickelungen stattfinden:

$$p_1 = \frac{\alpha}{x-a} + q_1,$$

$$p_2 = \frac{\beta}{(x-a)^2} + \frac{\beta'}{x-a} + q_2,$$

in denen α, β, β' Constanten bedeuten und q_1 und q_2 sich nach ganzen Potenzen von $(x-a)$ entwickeln lassen. Hieraus folgt die Darstellung (in Fuchs'scher Bezeichnungsweise):

$$p_1 = \gamma + \sum A_m D_x \log H(x - a_m)$$

$$\sum A_m = 0.$$

Setzt man demgemäss:

$$u = vy,$$

wobei v den Werth:

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}$$

hat, so leistet y der Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py,$$

wobei gesetzt ist:

$$P = \frac{1}{4} p_1{}^2 + \frac{1}{2} \frac{dp_1}{dx} - p_2.$$

Offenbar kann diese Form den weiteren Betrachtungen als Normalform zu Grunde gelegt werden. Wir fragen, welches die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür sind, dass diese Gleichung ein Integral besitzt, welches eine gewöhnliche doppeltperiodische Function ist, sich also schreiben lässt:

$$F(x) = e^{\delta x + \delta'} \prod_s H(x - a_s)^{r_s},$$

wobei die Grössen r_s positive und negative ganze Zahlen sein können. In der Umgebung des Punktes a_m gilt die Entwickelung:

$$\delta + \sum r_s D_x \log H(x - a_s) = \frac{r_m}{x - a_m} + \sum' r_s \,.\, D_x \log H(a_m - a_s) + \delta + \varphi(x),$$

wobei $\sum'$ sich über alle a_s mit Ausnahme von a_m erstreckt und $\varphi(x)$ holomorph in der Umgebung von $x = a_m$ ist und für $x = a_m$ Null wird.

Setzt man daher:

$$R_m = \sum_s' r_s \,.\, D_x \log H(a_m - a_s) + \delta,$$

so folgt in der Umgebung von $x = a_m$:

$$[D_x \log F(x)]^2 = \frac{r_m{}^2}{(x - a_m)^2} + \frac{2 r_m R_m}{x - a_m} + \psi,$$

wobei ψ holomorph in der Umgebung von a_m ist.

Hieraus folgt:

$$[D_x \log F(x)]^2 = \varepsilon + \sum [2r_s \,.\, R_s \,.\, D_x \log H(x-a_s) - r_s^2 D_x^2 \log H(x-a)].$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{F(x)} D^2 F(x) = D_x^2 \log F(x) + [D_x \log F(x)]^2$$

$$= \varepsilon + \sum [2r_s \,.\, R_s \,.\, D_x \log H(x-a_s) + (r_s - r_s^2) D_x^2 \log H(x-a_s)]$$

mithin folgt das Resultat:

Die gesuchten Bedingungen lauten: Es muss P sich in die Form bringen lassen:

$$P = \varepsilon + \sum A_s \,.\, D_x \log H(x-a_s) + B_s \,.\, D_x^2 \log H(x-a_s),$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$A_s = 2r_s \,.\, R_s, \quad B_s = r_s - r_s^2 \quad (r_s \text{ eine ganze Zahl}).$$

Man hat dann:

$$F(x) = e^{\delta x + \delta'} \prod_s H(x-a_s)^{r_s} \prod_\sigma H(x - a'_\sigma),$$

wobei das Zeichen $\prod_\sigma$ sich über alle Werthe a'_σ erstreckt, für welche die Function $F(x)$ Null wird und für welche $r_\sigma = 1$, $R_\sigma = 0$, $A_\sigma = 0$, $B_\sigma = 0$ ist. Für diese Werthe wird P nicht unendlich. Nennt man ihre Zahl k, so wird:

$$k + r_1 + r_2 + \cdots = 0,$$

wobei die Grössen r zu Werthen a gehören, für welche P unendlich gross wird. Ist das Problem aber für ein Integral gelöst, so ist es für zwei auch unmittelbar der Fall und zwar vermöge der Beziehung:

$$y_2 = \int \frac{dx}{y_1^2},$$

wie nicht näher ausgeführt werden soll.

Bei unseren Betrachtungen ist eine andere Normalform als die von Fuchs betrachtete zu Grunde gelegt worden, da Gewicht darauf gelegt ist, dass die Integrale nur einen Unendlichkeitspunkt besitzen und dieselbe analytische Form beibehalten.

Nr. 9.

In Bezug auf Picard'sche Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung verweisen wir auf die Arbeiten:

Brioschi: Sur quelques équations différentielles linéaires. Comptes rendus 91.

Mittag-Leffler: Om integrationen af de Hermite'ska differentialequationerna af tredje och fjerde ordningen etc. Helsingfors. Acta societatis Fennicae XII.

—— Ueber die Integration der Hermite'schen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung, bei denen die Unendlichkeitsstellen der Integrale von der ersten Ordnung sind. Annali di Matematica (2), XI.

Brioschi: Sulla classe di equazioni differenziali lineari considerate nella precedente Memoria del sig. Mittag-Leffler. Ibidem.

GOURSAT: Sur l'intégration de quelques équations linéaires au moyen de fonctions doublement périodiques. Bulletin de la Société Math. de France XII.

—— Sur une équation linéaire. Comptes rendus 98.

In den beiden letzten Arbeiten wird eine Beziehung zwischen unseren Theorien und der bekannten Briot-Bouquet'schen Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung hergestellt.

BIGIAVI: Sopra una classe di equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici. Annali della Reale Scuola N S. di Pisa. VI.

KRAUSE: Ueber die Differentialgleichungen, denen die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. VI. Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1891.

JAHNKE: Die Differentialbeziehungen für die eindeutigen doppeltperiodischen Functionen zweiter bezw. dritter Art. Crelle Journal 112.

In dieser weitreichenden Arbeit werden u. a. Methoden zur Aufstellung allgemeiner Differentialgleichungen gegeben, denen doppeltperiodische Functionen zweiter Art Genüge leisten.

Nr. 10.

Die Theorie der speciellen Integralformen der Picard'schen Differentialgleichungen ist in dem vorliegenden Werke nur kurz behandelt worden. Es geschieht das, weil man hierbei theilweise zu Theorien gelangt, die aus dem Rahmen der eigentlichen doppeltperiodischen Functionen heraustreten. Es bezieht sich das vor allem auf die Lamé'sche Differentialgleichung, über welche im speciellen Falle eine grössere Literatur vorhanden ist, die aber zu der Theorie der Kugel- und verwandter Functionen gezählt werden muss. Unter solchen Umständen beschränken wir uns auch bei der Literaturangabe auf diejenigen Arbeiten, die sich an die Theorie der doppeltperiodischen Functionen anschliessen.

Schon in den Picard'schen Arbeiten ist bemerkt, dass, wenn die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten sämmtlich eindeutig sind, sie deshalb nicht sämmtlich doppeltperiodisch zu sein brauchen. Daneben machte Mittag-Leffler auf einen besonderen Fall, der bei den Integralen eintreten kann, aufmerksam. Es geschieht das in der Arbeit:

Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Comptes rendus 90.

In besonders eingehender Weise hat sich Floquet mit der Form der Integrale der Picard'schen Differentialgleichungen beschäftigt. Wir nennen die folgenden Arbeiten:

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Comptes rendus 91. Annales de l'École normale (2), XII.

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques Comptes rendus 98. Annales de l'École normale (3), I.

Auf dieselben Theorien beziehen sich die Arbeiten von Stenberg:

Ueber die allgemeine Form der eindeutigen Integrale der linearen homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Acta mathematica XV.

Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten. Acta societatis Scientiarum Fennicae XIX Nr. 11 Helsingfors.

Daneben verweisen wir auf das Lehrbuch von Halphen und die specielleren Arbeiten von:

STENBERG: Sur un cas spécial de l'équation différentielle de Lamé. Acta mathematica X.

KRAUSE: Ueber die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind I, II 1892. Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Bemerkungen zum ersten Bande.

Bei der Angabe der wichtigsten Lehrbücher und Formelsammlungen ist zu bemerken, dass die Vorlesungen von Klein über elliptische Modulfunctionen von Fricke herausgegeben sind. Bei der Literaturangabe Nr. 3 (§§ 12—15) werde noch eine Arbeit von Pincherle hinzugefügt, auf welche mich der Herr Verfasser aufmerksam machte:

Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome. Giornale di Matematiche ... pubbl. per cura del Prof. G. Battaglini 18 aus dem Jahre 187?,

in welcher sich schon die wichtigsten Sätze über multiplicatorisch periodische Functionen finden.

Sodann verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn Stäckel die folgenden Bemerkungen:

Seite 2: Zeile 12 v. u. fallen die Worte „oder gleich" fort.

Seite 3: Zeile 9 v. u. Nach dem Worte „zusammenfallen" ist einzuschieben: „für die von uns später in Betracht zu ziehenden Functionen".

In der allgemeinen Form ist die Bemerkung unrichtig, wie aus dem mir von Herrn Stäckel mitgetheilten Beispiel hervorgeht:

$$\sum \frac{x^{2^n}}{2^n}.$$

(Siehe auch dessen Arbeit im 112. Bande des Crelle'schen Journals.) Bei diesem Beispiel findet für alle Punkte auf dem Convergenzkreis Convergenz statt.

Seite 39: Zeile 2 v. u. dürfte nach dem Worte „sind" besser gesagt werden: „Hat dann $f(x)$ im Punkte x einen endlichen bestimmten Werth, so ist:

$$f(xp^r) = f(x),$$

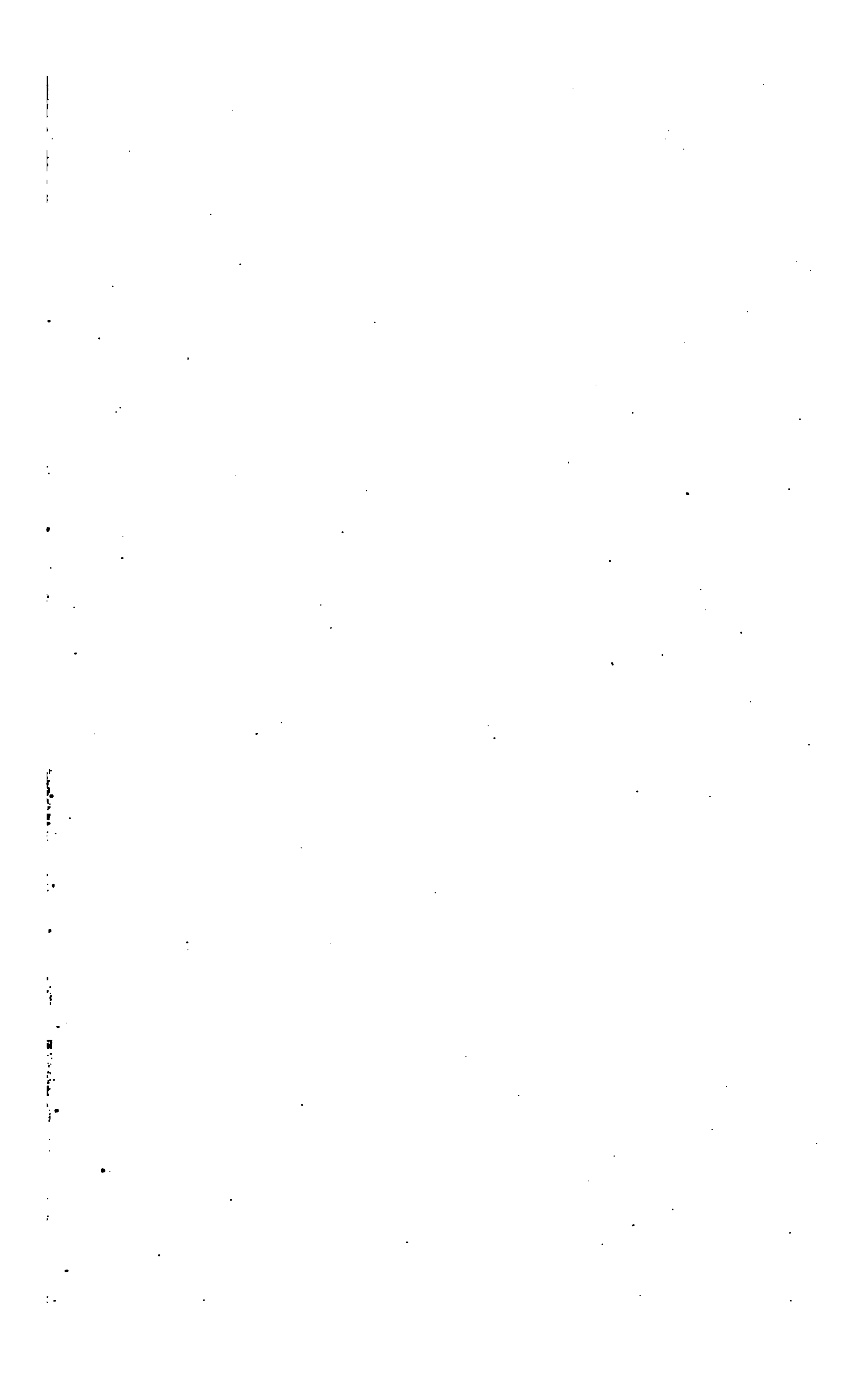
folglich ist $f(x)$ für $|x| = a$ constant, also überhaupt constant".

Bei der Literaturangabe Nr. 5 (§ 17) möge noch auf den entsprechenden Beweis im ersten Bande des Tannery-Molk'schen Werkes über elliptische Functionen und im zweiten Bande des Jordan'schen Werkes „Cours d'analyse" verwiesen werden.

Bei der Literaturangabe Nr. 8 (§§ 23—26) ist noch auf eine Arbeit von Gutzmer aus dem Jahre 1892 im 110. Bande des Crelle'schen Journals aufmerksam zu machen:

„Bemerkungen über die Jacobi'sche Thetaformel."

In dieser Arbeit wird in einfacher Weise ein specielles Additionstheorem hergeleitet.




Stanford University Libraries
3 6105 002 067 325





